Natürliche Zahlen

ZAHLEN

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$ **Menge der natürlichen Zahlen**

Beispiele:

5 ist eine natürliche Zahl kurz: $5 \in \mathbb{N}$ „5 ist ein Element von $\mathbb{N}$“

-2 ist keine natürliche Zahl kurz: $-2 \notin \mathbb{N}$ „-2 ist kein Element von $\mathbb{N}$“

0 ist keine natürliche Zahl kurz: $0 \notin \mathbb{N}$ „0 ist kein Element von $\mathbb{N}$“

Jede natürliche Zahl (außer der Zahl 1) hat eine natürliche Zahl als Vorgänger.
Beispiel: *257 ist der Vorgänger von 258*

Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.
Beispiel: *425 ist der Nachfolger von 424*

Somit gibt es unendlich viele natürliche Zahlen.

Ebenso:
$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$ **Menge der natürlichen Zahlen und Null**

delta5
Seite 10

Zahlen mit besonderen Eigenschaften

ZAHLEN

$\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; \ldots\}$ Menge der **ungeraden** natürlichen Zahlen

$\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; \ldots\}$ Menge der **geraden** natürlichen Zahlen

$\{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; \ldots\}$ Menge der **Quadratzahlen**
Multipliziert man eine natürliche Zahl mit sich selbst, erhält man eine Quadratzahl.
Beispiele: $2 \cdot 2 = 4$ oder $9 \cdot 9 = 81$

Beispiele für **Vielfachenmengen:**
$V_5 = \{5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$ Menge aller Vielfachen der Zahl 5
$V_7 = \{7; 14; 21; 28; 35; \ldots\}$ Menge aller Vielfachen der Zahl 7

Beispiele für **Teilermengen:**
$T_8 = \{1; 2; 4; 8\}$ Menge aller Teiler der Zahl 8
$T_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ Menge aller Teiler der Zahl 24

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; \ldots\}$ Menge der **Primzahlen**
Jede Primzahl hat **genau zwei** Teiler, 1 und sich selbst.

Jede natürliche Zahl (außer 1 und den Primzahlen) kann
man als Produkt von Primzahlen schreiben.
Beispiele:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

„Primfaktorzerlegung“

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

delta5
Seite 12

Zehnersystem (Dezimalsystem)

ZAHLEN

Der Wert, den eine Ziffer hat, hängt von der Stelle ab, an der sie innerhalb
einer Zahl steht. Daher spricht man von einem **Stellenwertsystem.**

Beispiel: Die Zahl 517204201

Zehnerstufen	Mrd	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
Ziffer		5	**1**	7	**2**	0	4	**2**	0	**1**

Die Zahlen 1; 10; 100; 1000; … nennt man **Stufenzahlen** unseres Zehnersystems.

delta5
Seite 16

Römische Zahlzeichen

Die römischen Zahlzeichen haben unabhängig davon, an welcher Stelle sie stehen, immer den gleichen Wert (also **kein** Stellenwertsystem):

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

Beispiele: 31 = XXXI 75 = LXXV 1362 = MCCCLXII

Steht ein kleineres Zeichen vor einem größeren, so wird subtrahiert.

Beispiele: 4 = IV 29 = XXIX 96 = XCVI

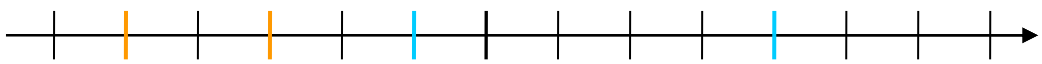
ZAHLEN

delta5
Seite 26

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ **Menge der ganzen Zahlen**

Zahlengerade:



Anordnung der ganzen Zahlen:
Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer, deren Bildpunkt auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.

Beispiel: **-5 < -3** und **-1 < 4** bzw. **-3 > -5** und **4 > -1**

Betrag einer ganzen Zahlen: Er gibt die Entfernung des Bildpunktes einer Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden an.

Beispiel: -5 und +5 haben beide den Betrag 5
(Man nennt -5 **Gegenzahl** von +5 und umgekehrt.)

Der Betrag von -17 ist 17, kurz: **| -17 | = 17** | +3,2 | = 3,2 | 0 | = 0 …

Allgemein:
| a | = a, wenn a positiv ist
| a | = 0, wenn a Null ist
| a | = -a, wenn a negativ ist

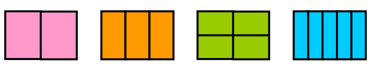
ZAHLEN

delta5
Seite 52

Stammbrüche

Wenn man ein Ganzes in 2; 3; 4; 5 ... gleich große Teile zerlegt, so erhält man Bruchteile, und zwar zwei Halbe, drei Drittel, vier Viertel, fünf Fünftel... .

Man schreibt für einen solchen Teil $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},\ldots$



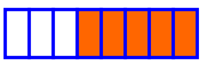
und nennt diese Brüche **Stammbrüche.**

ZAHLEN

delta6
Seite 10

Brüche

Zerlegt man ein Ganzes z. B. in acht gleich große Teile und fasst dann fünf dieser Teile zusammen, so erhält man den **Bruch** $\frac{5}{8}$.



5 ← **Zähler** (Er gibt an, wie viele dieser Teile zusammengefasst werden.)

— ← Bruchstrich

8 ← **Nenner** (Er gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird.)

ZAHLEN

delta6
Seite 12

Brüche mit besonderen Eigenschaften – ZAHLEN – delta6 Seite 16

Scheinbrüche: Ihr Zähler ist 0 oder ein Vielfaches ihres Nenners.

Beispiele: $\frac{0}{3}(=0)$; $\frac{2}{2}(=1)$; $\frac{12}{4}(=3)$; $\frac{30}{5}(=6)$; $\frac{70}{10}(=7)$; …

Echte Brüche: Ihr Zähler ist kleiner als ihr Nenner.

Beispiele: $\frac{0}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{99}{100}$; …

Unechte Brüche: Ihr Zähler ist mindestens so groß wie ihr Nenner.

Beispiele: $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{20}{10}$; $\frac{41}{13}$; $\frac{401}{100}$; $\frac{123456789}{3}$; …

Unechte Brüche, die keine Scheinbrüche sind, lassen sich als **gemischte Zahlen** schreiben.

Beispiele: $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$; $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$; $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$; $\frac{41}{13}=3\frac{2}{13}$; $\frac{401}{100}=4\frac{1}{100}$; …

Erweitern und Kürzen – ZAHLEN – delta6 Seite 26

Erweitern eines Bruchs:
Zähler und Nenner des Bruchs mit der gleichen natürlichen Zahl multiplizieren.

Beispiel: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{21}{28}$ (Es wurde mit 7 erweitert.)

Kürzen eines Bruchs:
Zähler und Nenner des Bruchs durch die gleiche natürliche Zahl dividieren.

Beispiel: $\frac{18}{42}=\frac{18:6}{42:6}=\frac{3}{7}$ (Es wurde mit 6 gekürzt.)

Beim Erweitern wie beim Kürzen ändert der Bruch seinen Wert nicht.
Die Form eines Bruchs, bei der sein Zähler und sein Nenner teilerfremd sind, heißt **Grundform** dieses Bruchs; ein Bruch in Grundform ist „vollständig gekürzt".

Dezimalzahlen – ZAHLEN – delta6 Seite 42

Brüche, deren Nenner Zehnerstufenzahlen sind, können als Dezimalzahlen geschrieben werden.

Beispiele: $\frac{7}{10}=0{,}7$; $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0{,}75$; $\frac{53}{1000}=0{,}053$; $21\frac{39}{1000}=21{,}039$

Stellenwerttafel:

H	Z	E	Komma	z	h	t	Zahl	Gelesen
	2	1	,	0	3	9	21,039	einundzwanzig Komma null drei neun

Runden – ZAHLEN – delta5 Seite 20 – delta6 Seite 52

Bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 rundet man **ab**! *Beispiele:*

562 ≈ 560 (Z) 141 ≈ 100 (H) 5,736 ≈ 5,7 (z – auf zehntel gerundet)

Bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9 rundet man **auf**! *Beispiele:*

836 ≈ 840 (Z) 488 ≈ 500 (H) 4525 ≈ 5000 (T)

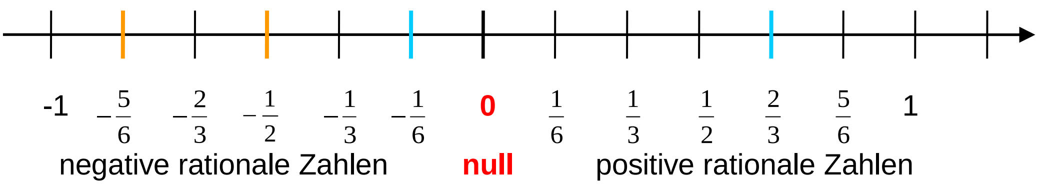
2,856 ≈ 3 (E) 2,856 ≈ 2,9 (z) 2,856 ≈ 2,86 (h)

Rationale Zahlen

Alle positiven und alle negativen Brüche bilden mit der Zahl 0 zusammen die **Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen**; diese enthält somit auch alle ganzen Zahlen (und deshalb auch alle natürlichen Zahlen).

Spiegelt man den Bildpunkt einer rationalen Zahl (z.B. – 0,74) am Nullpunkt, so erhält man den Bildpunkt ihrer **Gegenzahl** (hier: + 0,74).

Die Entfernung des Bildpunkts einer Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden gibt den **Betrag** dieser Zahl an. Die Bildpunkte einer Zahl und ihrer Gegenzahl sind vom Ursprung stets gleich weit entfernt; Zahl und zugehörige Gegenzahl besitzen den gleichen Betrag.



Anordnung der rationale Zahlen: Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Bildpunkt auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.

Beispiele: $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{6} < \frac{2}{3}$ und $0 < \frac{1}{3}$

ZAHLEN

delta6
Seite 32

Quadratwurzeln

Unter der Quadratwurzel aus x (kurz: „Wurzel aus x“ bzw. $\sqrt{x}$) versteht man für x ≥ 0 diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat gleich x ist.

Es gilt: $\sqrt{x} \geq 0$ und $(\sqrt{x})^2 = x$ und $\sqrt{x^2} = x$ **falls x ≥ 0**

Es gilt: $\sqrt{x^2} = |x|$ „Betrag von x“ **für beliebige rationale Zahlen x**

Der Term bzw. die Zahl unter dem Wurzelzeichen nennt man **Radikand.**

Das Berechnen des Wertes einer Quadratwurzel nennt man **Wurzelziehen** bzw. besser: **Radizieren**.

Beispiele:

$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{5} \approx 2{,}236067977$

$(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$ $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$

$$\sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4>0 \\ 0 & \text{für } x-4=0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4<0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x>4 \\ 0 & \text{für } x=4 \\ -x+4 & \text{für } x<4 \end{cases}$$

ZAHLEN

NEU
delta9
Seite 10f

Reelle Zahlen

ZAHLEN

Es gibt Zahlen, welche sich nicht als Bruch ($\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) darstellen lassen.

Ihre Darstellung ist daher weder endlich (abbrechend) noch periodisch.
Man nennt diese Zahlen **irrationale Zahlen**.

Beispiele:

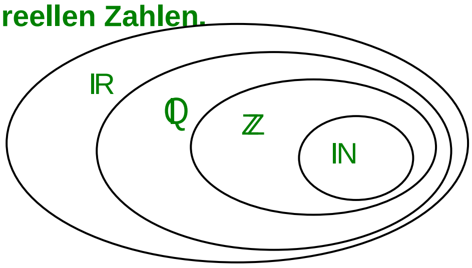
$\sqrt{3} \approx 1{,}7320508075688772935274463415059\ldots$ ist eine **irrationale** Zahl.

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \approx 0{,}3333333333\ 33333\ldots$ ist eine **rationale** Zahl, denn sie ist periodisch.

$\sqrt{1521} = 39$ ist eine **rationale** Zahl (natürliche Zahl), denn sie ist abbrechend.

1,0101101110111101111101111110111111110… ist eine **irrationale** Zahl,
denn sie bricht nie ab uns ist auch nicht periodisch!

Die Menge der rationalen Zahlen und der irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**.

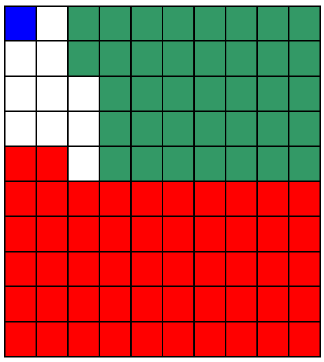


NEU
delta9
Seite 12f
Seite 18f

Prozentbegriff

ZAHLEN

Anteile kann man besser vergleichen, wenn sie in **Prozent** (geschrieben: %) angegeben werden:



1 % bedeutet $\frac{1}{100} = 0{,}01$

37 % bedeutet $\frac{37}{100} = 0{,}37$

52 % bedeutet $\frac{57}{100} = 0{,}57$

Häufige Prozentsätze:

$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}10$; $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20$; …

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}50$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$

delta6
Seite 30f

Prozent-rechnung

ZAHLEN

Prozentsatz **Grundwert** **Prozentwert**

$20\%(=\frac{1}{5})$ **von 40 Euro sind genau 8 Euro**

Rechnung: **40:100•20 = 40:5 = 8**

Das Ganze, dessen Anteile verglichen werden, bildet den **Grundwert.**

Jeden **Anteil** am Ganzen kann man (in **Bruchform** oder)
in **Prozent** angeben; er stellt den **Prozentsatz** dar.

Der jeweilige Teil des Ganzen bildet den **Prozentwert.**

Beispiel: In einem Lostopf sind 80 Lose, darunter sind 32 Gewinne!
Wie viel Prozent sind Nieten?

Grundwert: 80 Prozentwert: 48

Prozentsatz (Anteil in %): $\frac{48}{80}=\frac{6}{10}=\frac{60}{100}=60\%$.

delta6
Seite 196ff

Wird der Grundwert (z. B. der Preis eines Fernsehers) um p Prozent erhöht,

so steigt er auf das $(1+\frac{p}{100})$- Fache des ursprünglichen Werts.

Man nennt $(1+\frac{p}{100})$ den **Wachstumsfaktor.**

Beispiel: Ein Fernseher (320 €) wird um 10% teurer:

Neuer Preis: **320 € • $(1+\frac{10}{100})$ = 320 € • 1,1 = 352 €**

Wird der Grundwert (z. B. der Preis einer Waschmaschine) um p Prozent

vermindert, so nimmt er auf das $(1-\frac{p}{100})$- Fache des ursprünglichen Werts ab.

Man nennt $(1-\frac{p}{100})$ den **Abnahmefaktor.**

delta7
Seite 134ff

Beispiel: Eine Waschmaschine (490 €) wird um 15% billiger:

Neuer Preis: **490 € • $(1-\frac{15}{100})$ = 490 € • 0,85 = 416,50 €**

STRICHRECHENARTEN:					**Fachbegriffe**
Addition:	**35** 1. Summand	**+** plus	**28** 2. Summand	= 63 Wert der Summe	
	Termname: **Summe**				
Subtraktion:	**54** Minuend	**–** minus	**14** Subtrahend	= 40 Wert der Differenz	
	Termname: **Differenz**				
PUNKTRECHENARTEN:					
Multiplikation:	**5** 1. Faktor	**•** mal	**18** 2. Faktor	**=** 90 Wert des Produkts	
	Termname: **Produkt**				
Division:	**38** Dividend	**:** geteilt durch	**2** Divisor	= 19 Wert des Quotienten	**RECHENARTEN**
	Termname: **Quotient**				
Potenzieren:	Basis	**12^2** hoch	Exponent	= 144 Wert der Potenz	
	Termname: **Potenz**				
	Rechnung:		$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$		
	Weiteres Beispiel:		$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$		delta5 Seite 34/102/112/114
Zehnerpotenz:	$7 \cdot 10^4 = 7 \cdot 10\,000 = 70\,000$				

$$\begin{array}{r} 2496 \\ 1583 \\ +\ _{1\,1}\quad \\ \hline 4079 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} \overset{4}{\cancel{5}}184 \\ 1254 \\ - \quad \\ \hline 3930 \end{array}$$	$$\begin{array}{r} \underline{273 \cdot 836} \\ 218400 \\ 8190 \\ \underline{1638} \\ 228228 \end{array}$$	$$\begin{array}{l} 432 : 27 = 16 \\ \underline{-27} \\ \ 162 \\ \underline{-162} \\ \quad\ \ 0 \end{array}$$	**Schriftliches Rechnen in ℕ**
Überschlagsrechnungen:				**RECHENARTEN**
$2500 + 1600 = 4100$		$300 \cdot 800 = 240000$		
$5000 - 1000 = 4000$		$450 : 30 = 15$		
Beachte:		$0 \cdot a = 0$		delta5 Seite 36/40/106/116
		$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$		
		a : 0 ist NICHT möglich !!!		

	Rechnen in $\mathbb{Q}^+$

Gleichnamige Brüche addieren/subtrahieren:

Beispiele: $\frac{7}{19}+\frac{5}{19}=\frac{12}{19}$; $\frac{10}{21}+\frac{4}{21}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

Ungleichnamige Brüche addieren/subtrahieren:

Beispiele: $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}=\frac{15}{40}+\frac{16}{40}=\frac{31}{40}$; $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=\frac{14}{21}-\frac{9}{21}=\frac{5}{21}$

REGEL:
- ✓ Ungleichnamige Brüche werden vor der Addition bzw. Subtraktion gleichnamig gemacht. (Hauptnenner)
- ✓ Der Summenwert bzw. Differenzwert der Zähler wird durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

RECHENARTEN

Dezimalzahlen addieren/subtrahieren:

Beispiele: 3,28 + 5,06 = 8,34 7,4805 – 4,5040 = 2,9765

delta6 Seite 75/79/83

Multiplikation von Brüchen:

Beispiele: $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$; $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{9\cdot 7}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 7}=\frac{2}{21}$

REGEL:
- ✓ Produkt der Zähler dividiert durch das Produkt der Nenner. („Zähler mal Zähler , Nenner mal Nenner“)
- ✓ *Tipp:* Nach Möglichkeit vor dem Ausmultiplizieren kürzen!

Multiplikation von Dezimalzahlen:

Beispiele: 1,<u>6</u> · 2,<u>17</u> = 3,<u>472</u> NR: 16 · 217 = 3472

2,<u>5</u> · 3,<u>18</u> = 7,<u>950</u> NR: 25 · 318 = 7950

REGEL:
- ✓ Zunächst den Produktwert der Zahlen ohne Komma bilden.
- ✓ Das Endergebnis hat <u>so viele Dezimalen</u>, wie die <u>beiden Faktoren zusammen</u> besitzen.

Division durch einen Bruch:

Beispiele: $\frac{3}{11}:\frac{2}{5}=\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 2}=\frac{15}{22}$; $\frac{2}{9}:\frac{7}{15}=\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$

REGEL:
- ✓ Man dividiert durch einen Bruch indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert.

Division durch eine Dezimalzahl:

Beispiele: 3,536 **:** 3,4 = 35,36 **:** <u>34</u> = 1,04

delta6 Seite 94/98/ 100/102/104/ 106/108/114

REGEL:
- ✓ „Ausgleichende“ <u>Kommaverschiebung</u>: Der <u>Divisor</u> muss eine <u>natürliche Zahl</u> sein.
- ✓ Dividieren!
- ✓ Wird das Komma des Dividenden überschritten, so setzt man im Quotientenwert das Komma!

Rechnen in $\mathbb{Q}$

RECHENARTEN

Summanden mit gleichem Vorzeichen:

(+8) + (+5) = 8 + 5 = +13
(+1,8) + (+2,5) = 1,8 + 2,5 = +4,3

(–8) + (–5) = –8 – 5 = –13
(–1,8) + (–2,5) = –1,8 – 2,5 = –4,3

gemeinsames Vorzeichen der Summanden

Summenwert der Beträge der Summanden

Summanden mit verschiedenen Vorzeichen:

(+8) + (–5) = 8 – 5 = +3
(+1,8) + (–2,5) = 1,8 – 2,5 = –0,7

(–8) + (+5) = –8 + 5 = –3
(–1,8) + (+2,5) = –1,8 + 2,5 = +0,7

Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag

Unterschied der Beträge der Summanden

Beachte:
Bei verschiedenen Vorzeichen, aber gleichem Betrag ist der Summenwert 0.

(+8) + (–8) = 8 – 8 = 0
(+4,5) + (–4,5) = 4,5 – 4,5 = 0

(–5) + (+5) = –5 + 5 = 0
(–12,7) + (+12,7) = 0

Zwei rationale Zahlen werden **subtrahiert**, indem man zum Minuenden die Gegenzahl des Subtrahenden addiert.

Beispiel:
(+13) – (–5) = (+13) + (+5) = +18 = 18
(+3,4) – (–47,5) = (+3,4) + (+47,5) = +50,9 = 50,9
(–154,7) – (+35,8) = (–154,7) + (–35,8) = –154,7 – 35,8 = –190,5

Überschlagsrechnung: (–154,7) – (+35,8) ≈ –150 – 40 = –190

Faktoren mit gleichem Vorzeichen:

(+5) • (+3) = +15
(+1,9) • (+2,3) = +4,37

(–5) • (–3) = +15
(–1,9) • (–2,3) = +4,37

positives Vorzeichen („Plus")

Produktwert der Beträge der Faktoren

Faktoren mit verschiedenen Vorzeichen:

(+7) • (–3) = –21
(+1,9) • (–2,3) = –4,37

(–7) • (+3) = –21
(–1,9) • (+2,3) = –4,37

negatives Vorzeichen („Minus")

Produktwert der Beträge der Faktoren

Zwei ganze Zahlen (nicht Null) werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert. Falls Dividend und Divisor das gleiche Vorzeichen besitzen, erhält das Ergebnis ein positives Vorzeichen, sonst ein negatives.

Beispiel:
(–18) : (–3) = 6
(–18) : (+3) = –6
(–12,236) : (–2,8) = (–122,36) : (–28) = +4,37

Überschlagsrechnung: (–12,236) : (–2,8) ≈ (–120) : (–30) = 4

Merke:
0 • b = 0 für alle b ∈ $\mathbb{Q}$
0 : b = 0 für alle b ∈ $\mathbb{Q}$, **b ≠ 0**

delta6
Seite 176/
178/184/186

Rechen mit Quadratwurzeln

RECHENARTEN

$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$ *Beispiel:* $2\sqrt{7}+9\sqrt{7}=(2+9)\sqrt{7}=11\sqrt{7}$

$a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$ *Beispiel:* $5\sqrt{11}-2\sqrt{11}=(5-2)\sqrt{11}=3\sqrt{11}$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$ *Beispiel:* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^2}=x$ *Beispiel:* $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{7\cdot 7}=\sqrt{7^2}=7$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{x}{z}}$ *Beispiel:* $\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{242}{2}}=\sqrt{121}=11$

Dabei gilt: a, b $\in$ IR x, y $\in$ IR_0^+ z $\in$ IR^+

Achtung:

$0\cdot a=0$ für alle a $\in$ IR

$0:a=0$ für alle a $\in$ IR\{0}

$a:0$ ist für **KEINEN** Wert a aus IR möglich!

NEU
delta9
Seite 20ff

Rationalmachen des Nenners

RECHENARTEN

Bruchterme sollten möglichst so vereinfacht werden, dass im Nenner des Endergebnisses keine Wurzeln mehr stehen. Dazu wird geschickt erweitert:

Beispiele:

$\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=\frac{3}{7}\sqrt{7}$ Es wurde mit der Wurzel des Nenners erweitert.

$$\frac{5}{\sqrt{6}-8}=\frac{5\cdot(\sqrt{6}+8)}{(\sqrt{6}-8)\cdot(\sqrt{6}+8)}=\frac{5\sqrt{6}+40}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-8\sqrt{6}+8\sqrt{6}-64}=$$

3. Binomische Formel

$$=\frac{5\sqrt{6}+40}{6-64}=\frac{5\sqrt{6}+40}{-58}=-\frac{5\sqrt{6}+40}{58}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}=\frac{1\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{3})}{(\sqrt{8}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{5}=\frac{1}{5}(\sqrt{8}-\sqrt{3})$$

3. Binomische Formel

NEU
delta9
Seite 20ff

Rechenregeln und Rechengesetze

RECHENARTEN

Kommutativgesetz:
Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man die Summanden (Faktoren) vertauscht.

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz:
Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man Summanden (Faktoren) mit Klammern zusammenfasst oder vorhandene Klammern weglässt.

$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ **Rechenvorteile**

$(b + c) : a = b : a + c : a \quad (a \neq 0)$

Beispiele:

$5 \cdot 7{,}8 = 5 \cdot (7 + 0{,}8) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 0{,}8 = 35 + 4 = 39$ („Ausmultiplizieren“)

$8 \cdot 2\frac{3}{7} + 8 \cdot 6\frac{4}{7} = 8 \cdot (2\frac{3}{7} + 6\frac{4}{7}) = 8 \cdot 9 = 72$ („Ausklammern")

$99 \cdot 53 = (100 - 1) \cdot 53 = 100 \cdot 53 - 1 \cdot 53 = 5300 - 53 = 5247$ („Zerlegen")

Rechenregeln:

Die Terme, die in Klammern stehen, werden zuerst berechnet.
Beispiel: $15{,}9 - (25{,}4 - 17{,}6) = 15{,}9 - 7{,}8 = 8{,}1$

Potenzrechnungen werden vor „Punktrechnungen" ausgeführt.
Beispiel: $4{,}2 \cdot 2^5 = 4{,}2 \cdot 32 = 134{,}4$

„Punktrechnungen" werden vor „Strichrechnungen" ausgeführt.
Beispiel: $15{,}5 - 1{,}5 \cdot (84 - 78) = 15{,}5 - 1{,}5 \cdot 6 = 15{,}5 - 9 = 6{,}5$

delta5
Seite 34/44/66/
104/110/114/
120/136/

delta6
Seite 74/82/94/
102/120/182/
184/188

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

RECHENARTEN

Potenzen: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n Faktoren ; n>1)

$a^1 = a$ und $a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($n \in \mathbb{N}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Beispiele:

$13^6 = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 4\,826\,809$
$0{,}7^3 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$

$0^7 = 0$ $294^1 = 294$ $74^0 = 1$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Potenz	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
Wert	8	4	2	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$

:2 :2 :2 :2 :2 :2

delta8
Seite 132

Zahlen mit sehr großem bzw. mit sehr kleinem Betrag kann man mithilfe von Zehnerpotenzen übersichtlich darstellen: *Beispiele:* 87 000 000 = 8,7 · 10 000 000 = 8,7 · 10^7 Komma um 7 Stellen nach links… 0,00035 = 3,5 · 0,0001 = 3,5 · 10^{-4} Komma um 4 Stellen nach rechts… Allg.: $a \cdot 10^{\pm n}$ Für den Betrag a des Faktors vor der Zehnerpotenz gilt 1 < a < 10.	**Wissen-schaftliche Schreibweise** **„Gleitkomma-darstellung"** **RECHENARTEN** delta8 Seite 132
Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ bzw. $x^a : x^b = x^{a-b}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $4^2 \cdot 4^4 = 4^{2+4} = 4^6 = 4096$ $7^2 : 7^{-3} = 7^{2-(-3)} = 7^5 = 16807$ **Potenzieren einer Potenz** $(x^a)^b = x^{ab}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $(4^2)^4 = 4^8 = 65536$ $(3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$ **Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten** $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ bzw. $x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ $x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5 = 7776$ $4^{-2} : 2^{-2} = (4:2)^{-2} = 2^{-2} = 0{,}25$	**Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten** **RECHENARTEN** delta8 Seite 134
Die nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz x ist, nennt man die **n-te Wurzel** aus x. Schreibweise: $\sqrt[n]{x}$ Es gilt also: $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\sqrt[n]{x} \geq 0$ und $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ und $\sqrt[n]{x^n} = x$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Bezeichnungen: Der Term unter der Wurzel heißt **Radikand**. n heißt **Wurzelexponent**. (Der Wurzelexponent 2 wird meistens weggelassen!) *Beispiele:* $\sqrt[3]{8} = 2$ (weil 2³ = 8) $\sqrt[3]{125} = 5$ (weil 5³ = 125) $\sqrt[4]{81} = 3$ (weil 3⁴ = 81)	**Allgemeine Wurzel** **RECHENARTEN** ***NEU*** delta9 Seite 110ff
Allgemeine Wurzeln lassen sich auch als Potenzen darstellen: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ Dabei gilt: $x \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^3} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$ $512^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$ $256^{0,375} = 256^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{256^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = \sqrt[8]{(2^3)^8} = 2^3 = 8$	**Potenzen mit rationalen Exponenten** **RECHENARTEN** ***NEU*** delta9 Seite 114ff

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

$x^{\frac{a}{p}} \cdot x^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}$ $x \in \mathbb{R}^{+}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ und $p,q \in \mathbb{N}$

Beispiele: $5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{5^{9}} \approx 4{,}26$; $2^{2{,}7} \cdot 2^{0{,}3} = 2^{\frac{27}{10}} \cdot 2^{\frac{3}{10}} = 2^{3} = 8$

Potenzieren einer Potenz

$\left(x^{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a}{p}\cdot\frac{b}{q}}$ $x \in \mathbb{R}^{+}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ und $p,q \in \mathbb{N}$

Beispiele: $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 32^{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}} = 32^{\frac{6}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^{6} = 2^{6} = 64$; $\left(5^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{50}} = 5^{\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{50}} = 5^{\frac{6}{25}} = \sqrt[25]{5^{6}}$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten

$x^{\frac{a}{p}} \cdot y^{\frac{a}{p}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{p}}$ bzw. $x^{\frac{a}{p}} : y^{\frac{a}{p}} = (x : y)^{\frac{a}{p}}$ $x,y \in \mathbb{R}^{+}$ und $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$

Beispiele: $2^{\frac{3}{2}} \cdot 18^{\frac{3}{2}} = (2 \cdot 18)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{36}\right)^{3} = 6^{3} = 216$

$40^{\frac{4}{5}} : 10^{\frac{4}{5}} = (40 : 10)^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{4}\right)^{4} \approx 3{,}03$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

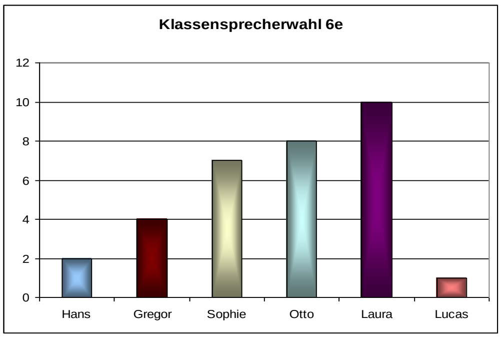
RECHENARTEN

NEU
delta9
Seite 114ff

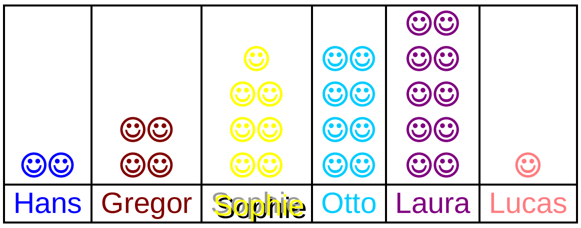
Tabelle

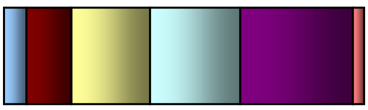
Schüler	Hans	Gregor	Sophie	Otto	Laura	Lucas
Stimmen	2	4	7	8	10	1
Anteil (%)	6,25%	12,5%	≈21,88%	25%	31,25%	≈3,13%

Säulendiagramm

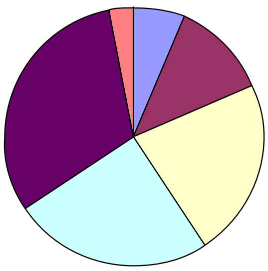


Bilddiagramm





Blockdiagramm (Streifendiagramm)



Kreisdiagramm

Tabellen und Diagramme

ZAHLEN

delta5
Seite 22

delta6
Seite 34

Zufalls-experimente

Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, d.h. nicht voraussagbar ist, nennen wir **Zufallsexperimente**.

Beispiele: Werfen einer Münze ; Ziehen von Kugel (Lottozahlen) ; Glücksrad drehen ; Spielwürfel werfen

Beispiel: Ein Spielwürfel wird 25-mal geworfen: Treffer (T) wäre z.B. eine Sechs, eine Niete (N) wäre dann eine 1, 2, 3, 4 oder 5.

Ergebnisse:

Strichliste

Augenzahl	Anzahl
6	||||
keine 6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |

Tabelle

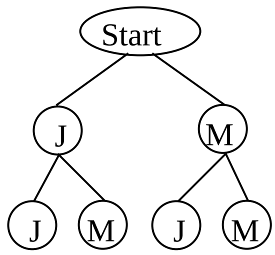
Augenzahl	Anzahl
6	4
keine 6	21

delta6
Seite 62

Ergebnismenge

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu einer **Ergebnismenge** (man spricht auch von einem **Ergebnisraum)** zusammen.
Diese wird häufig mit dem Buchstaben Ω bezeichnet.

Beispiel:
Geschwisterfolge bei zwei Kindern (**J**unge/**M**ädchen)
Mögliche Ergebnisse: JJ; JM; MJ; MM
Ergebnismenge $\Omega = \{JJ; JM; MJ; MM\}$



Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments lassen sich durch ein **Baumdiagramm** übersichtlich darstellen.

Ein Zufallsexperiment nennt man **einstufig** oder **mehrstufig**, je nachdem, ob man es in einem oder mehreren Schritten durchführt.

delta8
Seite 92 ff

NEU
delta9
Seite 144 ff

Ereignisse

Werden bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammengefasst, so erhält man ein **Ereignis.**

Die Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse.**

Ein Ereignis, für das alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments günstig sind, heißt **sicheres Ereignis.**

Ein Ereignis, das bei diesem Zufallsexperiment nicht eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis.**

Alle für ein Ereignis E ungünstigen Ergebnisse bilden zusammen dessen **Gegenereignis** $\overline{E}$**.**

Ereignisse werden häufig in Mengenform angegeben.

Beispiele:

Experiment: Werfen eines Würfels
Ereignis E_1: Werfen einer geraden Augenanzahl

Die Augenanzahlen 2 und 4 und 6.
$E_1 = \{2; 4; 6\}$

E_2: Werfen einer natürlichen Zahl
$E_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$

E_3: Werfen der Zahl -5
$E_3 = \{\} = \varnothing$

Gegenereignis zu E_1
$\overline{E}_1$: Werfen einer ungeraden Augenanzahl
$\overline{E}_1 = \{1; 3; 5\}$

delta8
Seite 94 ff

Relative Häufigkeit

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 25-mal) geworfen und es erscheint dabei k-mal (z.B. 4-mal) die Augenzahl 6.

Absolute Häufigkeit der „Sechser“: 4 (Anzahl der Sechser“)

Relative Häufigkeit der „Sechser“: $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$ (Anteil der „Sechser“)

Allgemein: **Relative Häufigkeit**

$$\frac{k}{n} = \frac{\text{"Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eingetreten ist"}}{\text{"Anzahl, wie oft das Experiment durchgeführt wurde"}}$$

delta6
Seite 64

delta8
Seite 96 ff

Wahrschein-lichkeit

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so ändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis E eintritt, schließlich nur noch sehr wenig:

Die relative Häufigkeit des Ereignisses E schwankt um eine feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses E.

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ist ein **Schätzwert** für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Beispiel: Experiment: Werfen einer Münze

Anzahl n der Würfe	Anzahl k der „Adler“	Relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit)
100	48	0,48 = 48 %
1000	517	0,517 = 51,7 %

delta8
Seite 96 ff

Arithmetisches Mittel

Das **arithmetische Mittel** berechnet man so:

Man addiert alle Einzelwerte und teilt diesen Summenwert durch die Anzahl aller Einzelwerte.

Beispiele: Einzelwerte 12 kg , 14,3 kg , 15,1 kg und 15,9 kg
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{12kg + 14{,}3kg + 15{,}1kg + 15{,}9kg}{4} = \frac{57{,}3kg}{4} = 14{,}325kg \approx 14{,}3kg$$

Einzelwerte 5 mal Note 1 , 12 mal Note 2 , 6 mal Note 3
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{(5 + 12 + 6)} = \frac{47}{23} \approx 2{,}04$$

delta7
Seite 128

Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente.**

Sind bei einem Laplace-Experiment 2 (3; 4; 5; 6; ... n) verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse:

$$\frac{1}{2} \quad (\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\ldots;\frac{1}{n}).$$

Dementsprechend nennt man einen idealen Spielwürfel einen **Laplace-Würfel** (L-Würfel), eine ideale Münze **Laplace-Münze** (L-Münze).

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E direkt berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments}}$$

$$= \frac{\text{„Anzahl der günstigen Ergebnisse"}}{\text{„Anzahl aller möglichen Ergebnisse"}}$$

delta8
Seite 102 ff

Zählprinzip

Es sollen z. B. vier Stellen besetzt werden.

Gibt es für die Besetzung der	1.Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle
	n_1	n_2	n_3	n_4

verschiedene Möglichkeiten,
so gibt es insgesamt n, • n_2 • n_3 • n_4 verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

Beispiel:
Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 3; 5; 7; 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern…

a) genau einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: 4 • 4 • 3 • 2 • 1 = 96
…

Null darf nicht vorne stehen!

Bleiben noch 4 Mögliche …

b) auch mehr als einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: 4 • 5 • 5 • 5 • 5 = 2500

Beispiel:
Auf wie viele Arten kann man vier verschiedene Bücher nebeneinander in ein Regal stellen?

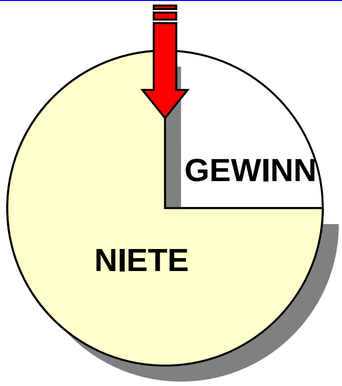
Lösung: Anzahl der Möglichkeiten: 4 • 3 • 2 • 1 = 24

delta8
Seite 98 ff

Baumdiagramme

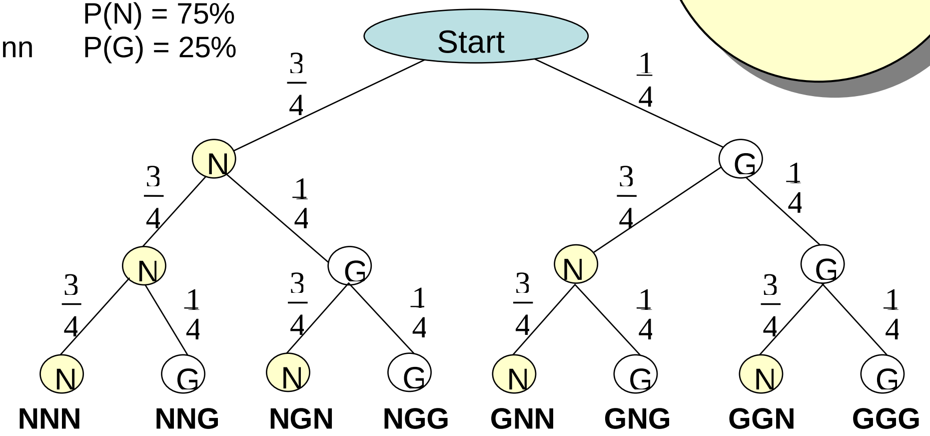
Besonders bei mehrstufigen Zufallsexperimenten sind Baumdiagramme zur Veranschaulichung sehr nützlich.

Beispiel: Ein Glücksrad (s. Bild) wird dreimal hintereinander gedreht.



Das entsprechende Baumdiagramm mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten sieht so aus:

N: Niete P(N) = 75%
G: Gewinn P(G) = 25%



Ergebnismenge Ω = { NNN, NNG, NGN, NGG, GNN, GNG, GGN, GGG }

Pfadregeln

1) Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an Zweigen von einem Knoten aus ergibt jeweils 1.

Im Beispiel gilt immer: $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

2) Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

Im Beispiel:
$$\text{P(NNN)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}\approx 42{,}2\%$$
$$\text{P(GNG)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}\approx 4{,}7\%$$

3) Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten derjenigen **Ergebnisse**, die zu diesem Ereignis führen.
Im Beispiel:
$$\text{P("}\underline{\text{Genau ein Niete}}\text{")}=\text{P(}\underline{\text{GGN;GNG;NGG}}\text{)}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}\approx 14{,}1\%$$

NEU
delta9
Seite 144 ff

Urnenmodelle

Viele Zufallsexperimente kann man durch ein so genanntes **Urnenmodell simulieren:**

Eine Urne enthält verschiedenfarbige, aber sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus nun n-mal hintereinander jeweils eine Kugel „blind“.

a) **Ziehen mit Zurücklegen**: Nach dem Notieren der Farbe wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit nicht!)

b) **Ziehen ohne Zurücklegen**: Die gezogene Kugel wird **nicht** wieder in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit ständig!)

NEU
delta9
Seite 148 ff

<table>
<tr><td>

Terme mit Variablen

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der außer Zahlen und Rechenzeichen auch veränderliche Größen, so genannte **Variable,** enthalten kann.

Für die Platzhalter wie z. B. □ , O oder ♡ bzw. Variable wie z. B. a, b, c, x, y oder z darf man verschiedene Zahlen einsetzen, die in der so genannten **Grundmenge G** angegeben sind. Wird in einen Term für die Variable eine Zahl aus der Grundmenge eingesetzt, so lässt sich der zugehörige Termwert berechnen.

Beispiel: G = {-2; 0; 1}

	$T_1(x) = 4 \cdot x^2 + 13$	$T_2(\heartsuit) = 3 \cdot \heartsuit + 7$
-2 einsetzen:	$T_1(-2) = 4 \cdot (-2)^2 + 13$ $= 4 \cdot 4 + 13 = 16 + 13 = \underline{\underline{29}}$	$T_2(-2) = 3 \cdot (-2) + 7$ $= -6 + 7 = \underline{\underline{1}}$
0 einsetzen:	$T_1(0) = 4 \cdot 0^2 + 13 = 0 + 13 = \underline{\underline{13}}$	$T_2(0) = 3 \cdot 0 + 7 = 0 + 7 = \underline{\underline{7}}$
1 einsetzen:	$T_1(1) = 4 \cdot 1^2 + 13 = 4 + 13 = \underline{\underline{17}}$	$T_2(1) = 3 \cdot 1 + 7 = 3 + 7 = \underline{\underline{10}}$

Vereinbarung: Man kann den Malpunkt bei Termen weggelassen, wenn es zu keinen Verwechslungen kommen kann.

Beispiele: 7 • y = 7y   13 • (a + 2z) = 13(a + 2z)   a • b = ab
x • (5s - a) = x(5s - a)   (a + b) • (a - b) = (a + b)(a - b)

Wenn bei jeder möglichen Einsetzung für die Variablen der eine Term stets den gleichen Wert hat wie der andere, so nennt man die beiden Terme **äquivalent,**
Man kann einen Term mit Hilfe von Rechengesetzen in einen anderen ihm äquivalenten Term umformen.

Beispiele: 7 • y und y • 7 sind äquivalente Terme
7 + a und a + 6 + 1 sind äquivalente Terme

</td><td>

Terme

delta7
Seite 62-76
Seite 78

</td></tr>
<tr><td>

Addieren und Subtrahieren

Gleichartige Glieder werden wie folgt addiert bzw. subtrahiert:

- ✓ Die gemeinsame Variable wird beibehalten.
- ✓ Die **Koeffizienten** werden addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele: **6a + 12a = 18a**   **100x + 42x = 142x**
17s − 13s = 4s   **5y − 9y = -4y**

Auflösen von Klammern bei der Addition und Subtraktion

Steht vor einer Klammer ein **Pluszeichen,** so kann man die Klammer weglassen, ohne dass sich der Wert des Terms ändert.

Beispiele:
8a **+** (7a + 2a) = 8a + 7a + 2a = 17a
8a **+** (7a – 2a) = 8a + 7a – 2a = 13a
8a **+** (–7a + 2a) = 8a + (–7a) + 2a = 8a – 7a + 2a = 3a

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen,** so wird beim Auflösen der Klammer in der Klammer jedes Pluszeichen zu **minus** und jedes Minuszeichen zu **plus.**

Beispiele:
8a **–** (7a + 2a) = 8a **–** 7a **–** 2a = -1a = -a
8a **–** (7a – 2a) = 8a **–** 7a **+** 2a = 3a
8a **–** (–7a + 2a) = 8a **+** 7a **–** 2a = 13a

</td><td>

Rechnen mit Termen (I)

delta7
Seite 78-102
Seite 198-203

</td></tr>
</table>

Rechnen mit Termen (II)

Multiplizieren und Dividieren

So multipliziert man ein Produkt mit einer Zahl:
Es wird nur **einer** der Faktoren mit dieser Zahl multipliziert!

Beispiele: $(8 \cdot y) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot y = 24 \cdot y = 24y$

$(a \cdot b) \cdot a = (a \cdot a) \cdot b = a^2 \cdot b = a^2b$

Wie dividiert man ein Produkt durch eine Zahl?
Indem man nur einen der Faktoren durch diese Zahl dividiert.

Beispiele: $(15 \cdot a) : 3 = (15 : 3) \cdot a = 5 \cdot a = 5a$

$(a \cdot b) : a = (a : a) \cdot b = 1 \cdot b = b$

Multiplizieren und Dividieren von Summen und Differenzen

Man multipliziert eine Summe mit einem Faktor, indem man jedes Glied der Summe mit diesem Faktor multipliziert und dann die Produkte addiert (Bei Differenz ebenso).

Beispiel: $8 \cdot (12 + x - 3y) = 8 \cdot 12 + 8 \cdot x - 8 \cdot 3y = 96 + 8x - 24y$

Man dividiert eine Summe durch einen (von null verschiedenen) Divisor, indem man jedes Glied der Summe durch diesen Divisor dividiert und dann die Quotienten addiert (Bei Differenz ebenso).

Beispiel: $(12 + 4x - 6y) : 2 = 12 : 2 + 4x : 2 – 6y : 2 = 6 + 2x - 3y$

Ausmultiplizieren von Klammern

Man multipliziert eine Summe (Differenz) mit einer Summe (Differenz), indem man jedes Glied der ersten Summe (Differenz) mit jedem Glied der zweiten Summe (Differenz) **unter Beachtung der Vor- und Rechenzeichen** multipliziert und dann die Teilprodukte addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele:

$(5y + 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y + 12y + 27 = 20y^2 + 57y + 27$

$(5y - 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y - 12y - 27 = 20y^2 + 33y - 27$

$(5y + 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y + 12y - 27 = 20y^2 - 33y - 27$

$(5y - 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y - 12y + 27 = 20y^2 - 57y + 27$

Ausklammern

Durch Ausklammern eines Faktors wird aus einer Summe (Differenz) ein **Produkt.**

Beispiele: $6x + 18y = 6(x + 3y)$

$5xyz + 20\,xyw = 5xy(z + 4w)$

$-5w - 2s = (-1) \cdot (5w + 2s) = -(5w + 2s)$

delta7
Seite 78-102
Seite 198-203

Binomische Formeln

Terme der Form a + b oder a – b nennt man **Binom**.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ “**Plus-Formel**“

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ “**Minus-Formel**“

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ “**Plus-Minus-Formel**“

NEU
delta9
Seite 52ff

Bruchterme

Bruchterm: Die Variable tritt auch im Nennerterm des Bruchs auf. $\frac{5x+2}{x-7}$

Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur **Definitionsmenge** des Bruchterms. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Bruchterme können wie Brüche **erweitert und gekürzt** werden.

Erweitern: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden mit der gleichen Zahl (mit dem gleichen Term) multipliziert.

Beispiel:
$$\frac{4}{x} = \frac{8}{2x} = \frac{8(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{8(x+1)a}{2x(x+1)a} = \ldots$$
…mit 2 …mit (x+1) …mit a **… erweitert.**

Kürzen: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden durch die gleiche Zahl (durch den gleichen Term) dividiert.

Beispiel:
$$\frac{25x^2y(a+1)}{10x(a+1)z} = \frac{25x^2y}{10xz} = \frac{5x^2y}{2xz} = \frac{5xy}{2z}$$
…mit a+1 …mit 5 …mit x **… gekürzt.**

Beachte: Die größtmögliche Definitionsmenge kann sich beim Erweitern bzw. Kürzen eines Bruchterms ändern.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiel:
$$\frac{8x}{x+2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{8x+2-3x}{x+2} = \frac{5x+2}{x+2}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ungleichnamige Bruchterme werden vorher gleichnamig gemacht.

Beispiel:
$$\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{3(3x+1)}{3x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{9x+3+2x-1}{3x} = \frac{11x+2}{3x}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Multiplikation und Division von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert. (KÜRZEN!)

Beispiel:
$$\frac{8x}{x+2} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{8x \cdot 3}{(x+2) \cdot 4x} = \frac{2 \cdot 3}{(x+2)} = \frac{6}{x+2}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$

Ein Bruchterm wird durch einen zweiten dividiert, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrbruch des zweiten multipliziert.

Beispiel:
$$\frac{5-x}{x+1} : \frac{3x-6}{x+1} = \frac{5-x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x-6} = \frac{5-x}{3x-6}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

delta8
Seite 118-123

Gleichungen – Grundbegriffe

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die miteinander durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. — **$x + 3 = 2x - 7$**

Setzt man für die Variable eine Zahl in die Gleichung ein, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben. — **$4 + 3 = 2 \cdot 4 - 7$**; **$7 = 1$ falsch**

Die (vorgegebene) Menge aller Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**. — **$G = \mathbb{N}$**

Die Zahlen der Grundmenge G, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage liefern, heißen **Lösungen** dieser Gleichung. — **$10 + 3 = 2 \cdot 10 - 7$**; **$13 = 13$**

Die Lösungen einer Gleichung fasst man zur **Lösungsmenge 𝕃** dieser Gleichung zusammen. — **$\mathbb{L} = \{10\}$**

Wenn kein Element der Grundmenge G beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, dann ist die Lösungsmenge die **leere Menge**, geschrieben { } (oder Ø). — **$G = \{1; 2; 3\}$**; **$x + 3 = 2x - 7$**; **$\mathbb{L} = \{ \}$**

delta7
Seite 104-105

Lösen von (Un-) Gleichungen (I)

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Äquivalenzumformungen sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man — **$3x + 1 = 7$**

- ✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert. — **$3x + 1 = 7 \quad |+3$**; **$3x + 4 = 10$**
- ✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert. — **$3x + 4 = 10 \quad |-4$**; **$3x = 6$**
- ✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**. — **$3x = 6 \quad |\cdot 2$**; **$6x = 12$**
- ✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**. — **$6x = 12 \quad |:6$**; **$x = 2$**

Beispiele:

a) Grundmenge: $G = \mathbb{N}$
Gleichung: $x + 12 = 4 \quad | -12$
Neue Gleichung: $x = -8$
Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{ \}$ weil $-8 \notin \mathbb{N}$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

b) $G = \mathbb{Z}$
$4x - 3 = 25 \quad | +3$
$4x = 28 \quad | :4$
$x = 7 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{ 7 \}$

c) $G = \mathbb{Q}$
$7x + 4 = 3 - x \quad | +x$
$8x + 4 = 3 \quad | -4$
$8x = -1 \quad | :8$
$x = -0{,}125$
$\mathbb{L} = \{ -0{,}125 \}$

ACHTUNG: Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so muss man das Ungleichheitszeichen <u>umdrehen</u>!

d) $-4x < 24 \quad | :(-4)$
$x > -6$
$\mathbb{L} = \{ x \mid x > 6 \}$ **Mengenschreibweise**
$=]\,6\,;\,+\infty\,[$ **Intervallschreibweise**

e) $-x \geq -31 \quad | \cdot(-1)$
$x \leq 31$
$\mathbb{L} = \{ x \mid x \leq 31 \}$
$=]\,-\infty\,;\,31\,]$

delta7
Seite 106-119

delta8
Seite 62-65

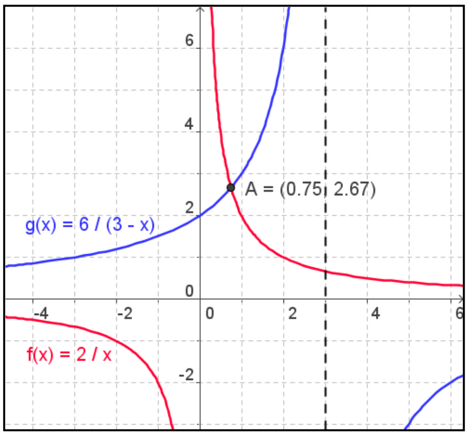
Lösen von Gleichungen (II)

Bruchgleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable in mindestens einem der Nenner auftritt nennt man **Bruchgleichung**.

Beispiel: $\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$

Graphische Lösung:
Man zeichnet zuerst die Funktionsgraphen der beiden Gleichungsseiten.
Dann liest man die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte ab.



Im Beispiel:
Die Graphen der Funktionen

f: f(x) $= \frac{2}{x}$ und **g: g(x)** $= \frac{6}{3-x}$

haben nur den Punkt A $(0{,}75 \mid 2{,}\overline{6})$ gemeinsam, die Bruchgleichung hat also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Definitionsmenge angeben: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

Rechnerische Lösung:
Beide Seiten der Bruchgleichung mit einem gemeinsamen Nenner (am besten mit dem Hauptnenner) aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen.

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$

HN: $(3-x)\cdot x$

$$\frac{2\cdot(3-x)\cdot x}{x} = \frac{6\cdot(3-x)\cdot x}{3-x}$$

Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen.
Prüfen, ob die ermittelte Lösung zur Definitionsmenge gehört.

$$\begin{aligned} 2\cdot(3-x) &= 6\cdot x && \mid \text{TV} \\ 6-2x &= 6x && \mid +2x \\ 6 &= 8x && \mid :8 \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Probe machen: LS: $\frac{2}{0{,}75} = 2\frac{2}{3}$ RS: $\frac{6}{3-0{,}75} = \frac{6}{2{,}25} = 2\frac{2}{3}$ LS = RS ✓

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Weiteres Beispiel: $\frac{2x+2}{x-6} = \frac{4x-140}{2x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$

HN: 2x(x-6) $\frac{(2x+2)2x(x-6)}{x-6} = \frac{(4x-140)2x(x-6)}{2x}$

$$(2x+2)2x = (4x-140)(x-6)$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x &= 4x^2 - 24x - 140x + 840 && \mid -4x^2 \\ 4x &= -164x + 840 && \mid +164x \\ 168x &= 840 && \mid :168 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{5\}$.

Probe: LS = (2·5+2):(5-6) = 12:(-1) = -12 RS = (4·5-140):(2·5) = -120:10 = -12 LS = RS ✓

delta8
Seite 124-128

Lösen von Gleichungen (III)

Quadratische Gleichungen

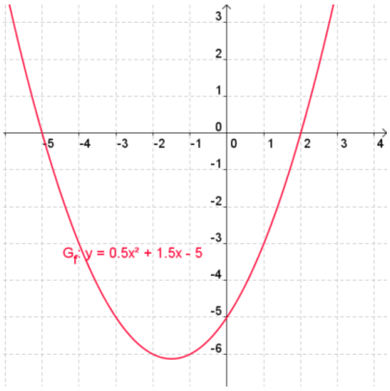
Gleichungen der Form

$ax^2 + bx + c = 0$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$

nennt man **quadratische Gleichungen**.

Beispiel:

$0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5 = 0$



Graphische Lösung:
Man kann die Lösungen der Gleichung als Nullstellen des Funktionsgraphen von $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5$ deuten.

Im Beispiel:
Der Graph der Funktion f(x) hat die beiden Nullstellen (–5|0) und (2|0) und die Gleichung somit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-5; 2\}$.

Rechnerische Lösung mit Linearfaktoren:

$(x - 3)(x + 5) = 0$ ergibt ausmultipliziert die Gleichung $x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$.
Bei der **Linearfaktorzerlegung** links kann man die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$ ablesen! Somit kann man oft Lösungen erraten:

Beispiele:

$x^2 - 12x + 20 = 0$	$x^2 - 8x = 0$	$x^2 - 49 = 0$
$(x - 10)(x - 2) = 0$	$x(x - 8) = 0$	$(x - 7)(x + 7) = 0$
$\mathbb{L} = \{10; 2\}$	$\mathbb{L} = \{0; 8\}$	$\mathbb{L} = \{-7; 7\}$

Rechnerische Lösung mit der Lösungsformel:

Die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ lautet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

G = ℝ

Der Radikand $b^2 - 4ac$ wird auch **Diskriminante D** genannt.

Ist **D < 0**, so gibt es **KEINE** Lösung.
Ist **D = 0**, so gibt es **genau eine** Lösung.
Im Falle **D > 0** existieren **zwei** Lösungen.

Beispiele:

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = (-12)^2 - 4\cdot1\cdot20 = 144 - 80 = 64 > 0$ also gibt es zwei Lösungen!

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2\cdot1} = \frac{12 \pm 8}{2} = \frac{2(6 \pm 4)}{2} = 6 \pm 4$$

$x_1 = 6 + 4 = 10$ und $x_2 = 6 - 4 = 2$ also $\mathbb{L} = \{10; 2\}$

$3x^2 - 30x + 75 = 0$

$D = (-30)^2 - 4\cdot3\cdot75 = 900 - 900 = 0$ also gibt es genau eine Lösung!

$$x_{1/2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{0}}{2\cdot3} = \frac{30 \pm 0}{6} = \frac{30}{6} = 5$$ also $\mathbb{L} = \{5\}$

Die Gleichung $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ hat wegen
$D = 3^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-7) = 9 - 56 = -47 < 0$ keine Lösung, also $\mathbb{L} = \{\}$

NEU
delta9
Seite 70ff

Funktionen (I)

Fachbegriffe

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann durch eine Zuordnung beschrieben werden: Gibt es dabei zu **jedem** zulässigen Wert der ersten Größe **genau einen** Wert der ihr zugeordneten zweiten Größe, so nennt man die Zuordnung eine **Funktion** f.

Funktionen können z. B. durch **Terme**, durch **Tabellen** oder durch **Schaubilder (Graphen)** beschrieben werden.

Häufig wird die erste Größe, die **unabhängige Variable**, mit **x** bezeichnet. Die zweite Größe, die von x **abhängige Variable**, bezeichnet man als Funktionswert von x.

Die Menge aller Werte von x heißt **Definitionsmenge D_f**,
die Menge aller **Funktionswerte** heißt **Wertemenge W_f**.

Werte von x, für die der Funktionswert 0 ist, heißen **Nullstellen** der Funktion.

Beispiel: **Zuordnungsvorschrift:**
Jeder rationalen Zahl wird der um 4 verminderte Wert ihres Quadrats zugeordnet.

Funktion f: f (x) = $x^2 - 4$

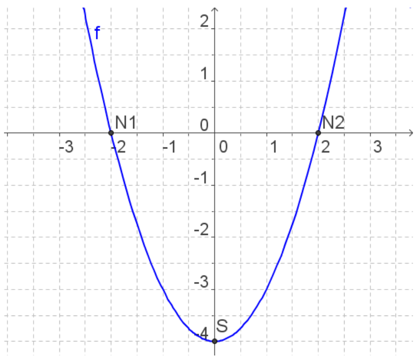
Funktionsgleichung Funktionsterm

x	0	$\pm 0{,}5$	± 1	± 2
y = f(x)	-4	-3,75	-3	0

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W_f = [-4; +\infty[$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 2$,
da f (± 2) = 0 ist.



Funktionsgraph

delta8
Seite 30ff

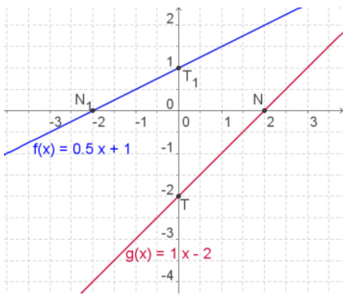
Funktionen (II)

Lineare Funktionen

f: f(x) = mx + t $m, t \in \mathbb{R}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

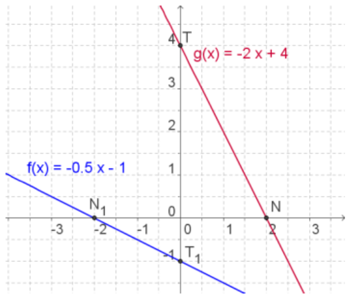
Der Graph G_f einer linearen Funktion ist eine Gerade g, **die die y-Achse im Punkt T(0 | t)** schneidet.

Man nennt t den **y-Achsenabschnitt** der Geraden g;
m ist die **Steigung** der Geraden g.



Steigende Geraden m > 0

Für die **Nullstelle** x_N von f gilt $f(x_N) = 0$.

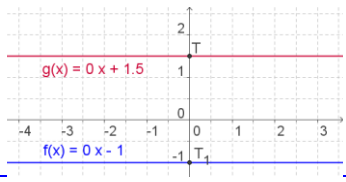


Fallende Geraden m < 0

Man spricht auch von der Gleichung der Geraden g und schreibt g: y = mx + t.

Verläuft die Gerade durch die Punkte
P (x_P I y_P) und Q (x_Q I y_Q), $x_Q \neq x_P$,
so gilt für die Geradensteigung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$



Zur x-Achse parallele Geraden m = 0

delta8
Seite 47ff

Funktionen (III)

Funktionen der direkten Proportionalität

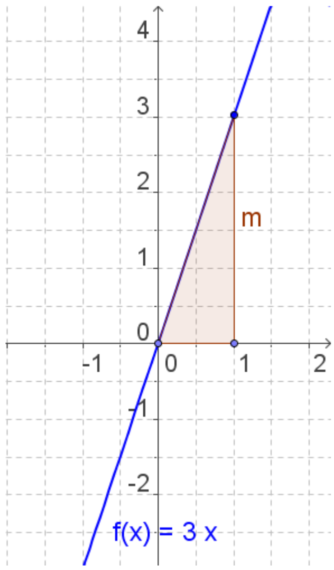
Wird dem Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen, ... dem k-Fachen ($k \in \mathbb{R}$) einer Größe x das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, ... das k-Fache einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **proportionale Größen**.

Bei dieser Zuordnung gilt $\frac{y}{x} = m$
mit **festem** m (m, x, y ≠ 0);
sie kann also durch die Funktionsgleichung
y = mx beschrieben werden.

Die Funktion f: f(x) = mx ; $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
heißt **proportionale Funktion**.

Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine **Gerade durch den Ursprung** des Koordinatensystems;
dabei ist m die **Steigung** dieser Geraden.

Das rechtwinklige Dreieck mit waagrechter Kathete der Länge 1 LE und senkrechter Kathete der Länge m LE heißt **Steigungsdreieck**.



delta8
Seite 48ff

Funktionen (IV)

Funktionen der indirekten Proportionalität

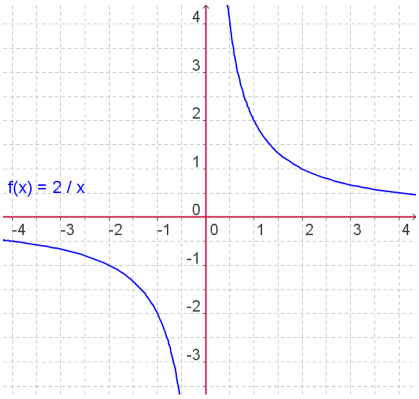
Zwei Größen x und y heißen zueinander **indirekt proportional**, wenn gilt:
Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht ... , halbiert, drittelt ... man den Wert der einen Größe x, so halbiert, drittelt, viertelt ... , verdoppelt, verdreifacht ... sich der Wert der anderen Größe y.

Dem k-Fachen von x entspricht der k-te Teil von y und umgekehrt ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Das Produkt xy von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen hat stets den gleichen Wert:

$x \cdot y = a$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

d. h. $y = \frac{a}{x}$.

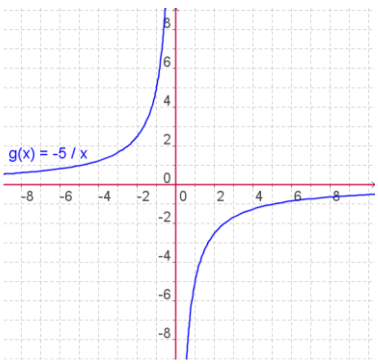


Jede Funktion f: $f(x) = \frac{a}{x}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
beschreibt die indirekte Proportionalität der beiden von null verschiedenen Variablen x und y.

Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Hyperbel**.

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote**,
die y-Achse eine **senkrechte Asymptote**
des Funktionsgraphen.



delta8
Seite 112ff

Funktionen (V)

Gebrochen-rationale Funktionen

Ist der Funktionsterm ein Bruchterm, bei dem die Variable mindestens im Nenner vorkommt, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion.**

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Variablen, für die der Nenner nicht gleich null wird.

Definitionslücken: Nullstellen des Nennerterms

Beispiel:

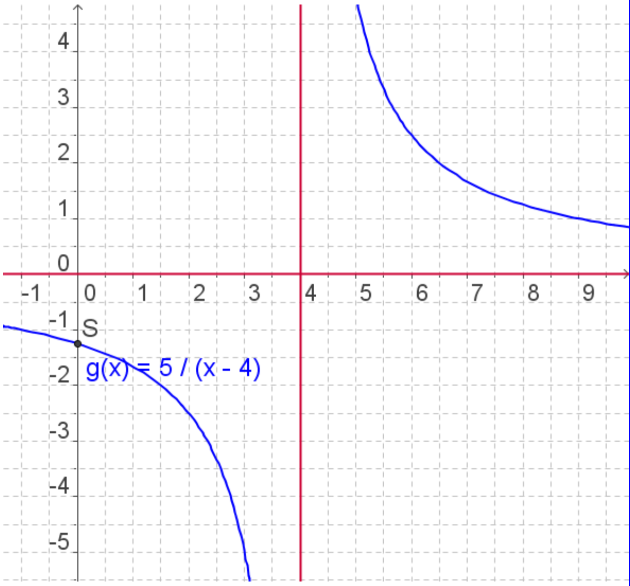
$g(x) = \frac{5}{x-4}$ $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Die Funktion g hat die Definitionslücke 4.

g hat keine Nullstelle.

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -1,25).

Waagrechte Asymptote: y = 0
Senkrechte Asymptote: x = 4



Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	-1	-1,25	-1,67	-2,5	-5	-	5	2,5

Beispiel:

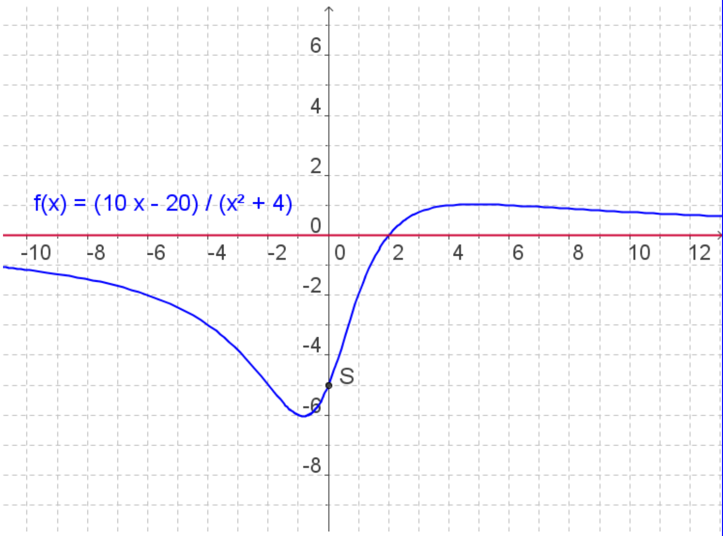
$f(x) = \frac{10x-20}{x^2+4}$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Die Funktion f hat keine Definitionslücke.

f hat die Nullstelle N(2 | 0).

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -5).

Waagrechte Asymptote:
y = 0
Senkrechte Asymptote:
Keine



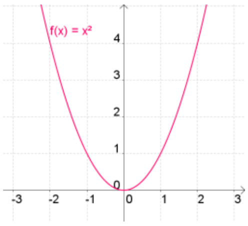
x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	-2	-3	-5	-5	0	1	1	0,88

delta8
Seite 112ff

Funktionen (VI)

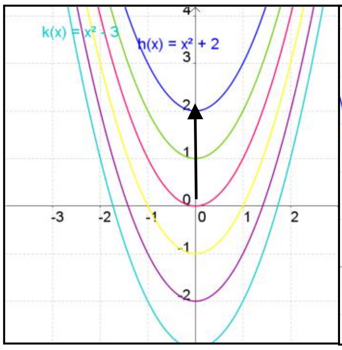
Normalparabel nennt man den Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$.

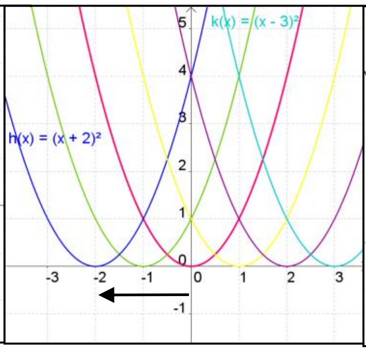
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad W_f = \mathbb{R}_0^+$
Nullstelle $\quad N(0 \mid 0)$
Tiefster Punkt: $\quad$ **Scheitel** $S(0 \mid 0)$

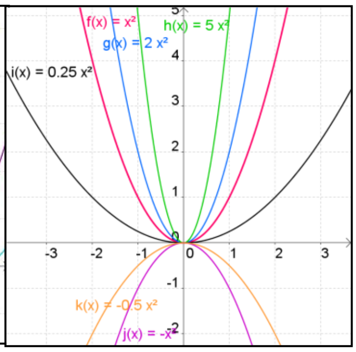


Verschiebung der Normalparabel…

… in y-Richtung	**… in x-Richtung**	**Streckung / Spiegelung**
$f(x) = x^2 + a$	$f(x) = (x + a)^2$	$f(x) = ax^2$







Der Graph der **quadratischen Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **Parabel**.
Dabei gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$
Der Graph hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse $s_y(0 \mid c)$.
Es gibt zwei, einen oder keinen Schnittpunkt(e) mit der x-Achse (**Nullstellen**).
Der tiefste / höchste Punkt der Parabel heißt **Scheitel**(punkt).
Der Graph ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel.

Der Graph der Parabel zur Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist für …

$a < -1$	…nach unten geöffnet	…enger als die Normalparabel
$a = -1$	…nach unten geöffnet	… kongruent zur Normalparabel
$-1 < a < 0$	…nach unten geöffnet	…weiter als die Normalparabel
$0 < a < 1$	…nach oben geöffnet	…weiter als die Normalparabel
$a = 1$	…nach oben geöffnet	… kongruent zur Normalparabel
$a > 1$	…nach oben geöffnet	…enger als die Normalparabel

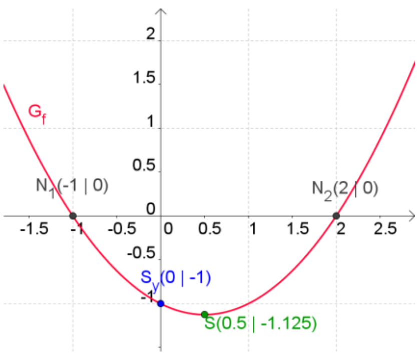
Durch **quadratische Ergänzung** kann man jeden Funktionsterm einer Parabel auf die **Scheitelform** $f(x)= a(x - d)^2 + e$ bringen. Der Scheitel ist dann $S(d \mid e)$.

Beispiel: $\quad f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1$
$= \mathbf{0{,}5}\,[\, x^2 - x + (0{,}5)^2 - (0{,}5)^2 \,] - 1$
$= 0{,}5\,[\, (x - 0{,}5)^2 - 0{,}25 \,] - 1$
$= 0{,}5\,(x - 0{,}5)^2 - 0{,}125 - 1$
$= 0{,}5(x - 0{,}5)^2 - 1{,}125$

Quadratisch ergänzen
Ausklammern
Binomische Formel

Somit: $\quad G_f$ ist weiter als die Normalparabel und nach oben offen ($a=0{,}5$)!

Scheitel $S(0{,}5 \mid -1{,}125)$ $\qquad S_y(0 \mid -1)$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [\, -1{,}125 \,;\, \infty \,[$
Nullstellen: $\quad 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$
Mit Lösungsformel: $\quad N_1(-1 \mid 0)$ und $N_2(2 \mid 0)$



Quadratische Funktionen

NEU
delta9
Seite 58ff

Lineare Gleichungs-Systeme (I)

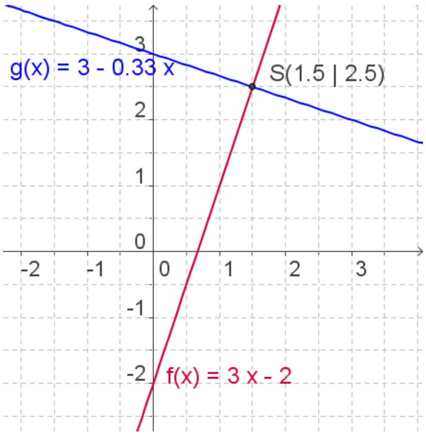
Mit zwei Variablen

Beispiel:

I) 3y + x = 9
II) y = 3x - 2

Zwei lineare Gleichungen, die **zwei** Variable enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.



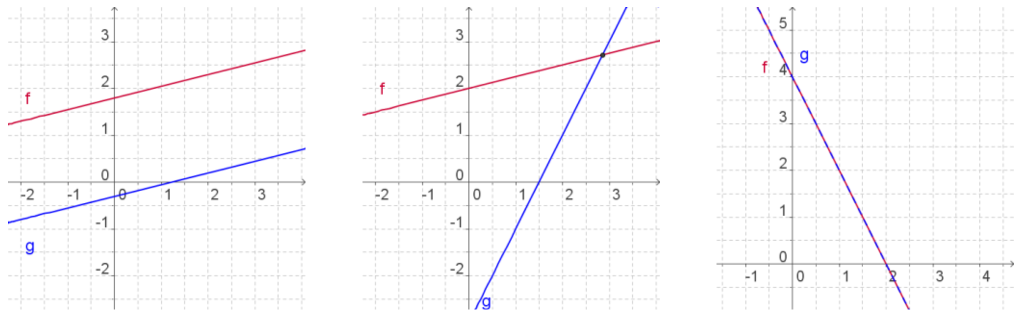
I) 3y + x = 9 → $g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

II) y = 3x – 2 → f(x)= 3x – 2

Die Koordinaten $x_s = 1{,}5$; $y_s = 2{,}5$ des Schnittpunkts S (1,5 I 2,5) der zugehörigen Geraden erfüllen als einzige beide Gleichungen.

Sie bilden zusammen die (einzige) Lösung des Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge also $\mathbb{L}$ = {(1,5 | 2,5)} ist.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden zueinander parallel sind, einander schneiden oder zusammenfallen.



Die Lösung kann **graphisch** gefunden werden, indem man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem einträgt und die Koordinaten ihres Schnittpunkts abliest.

Das **Gleichsetzungsverfahren:**

1. Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen — $y = -\frac{1}{3}x + 3$ und $y = 3x - 2$
2. Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten — $-\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 2 \quad | \cdot 3$
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält —
   $-x + 9 = 9x - 6 \quad | +x\,,\ +6$
   $15 = 10x \quad | :10$
   $x = 1{,}5$
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen — $y = 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$
5. Angeben der Lösungsmenge — $\mathbb{L}$ = {(1,5 | 2,5)}

delta8
Seite 73ff

Lineare Gleichungs-Systeme (II)

Das **Einsetzungsverfahren:**

1. Auflösen einer der Gleichungen nach einer der Variablen — **3y + x = 9**; **y = 3x – 2**
2. Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung — **3(3x – 2) + x = 9**; 9x – 6 + x = 9; 10x – 6 = 9
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält — 10x = 15; x = 1,5
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen — **y = 3**·1,5 **– 2 = 2,5**
5. Angeben der Lösungsmenge — $\mathbb{L}$ = {(1,5 | 2,5)}

Mit zwei Variablen

Das **Additionsverfahren:**

Unterscheiden sich bei einem Gleichungssystem die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen, so ist es günstig, die beiden Gleichungen zu addieren, da dann eine der beiden Variablen „wegfällt".

Beispiel:

I	12x + 7y = 45	
II	–5x – 7y = –31	
I + II	7x = 14	I :7
	x = 2	

In Gleichung I eingesetzt:
12·2 + 7y = 45
7y = 21
y = 3
$\mathbb{L}$ = {(2 | 3)}

Verallgemeinerung (siehe unten):
Wenn keine der beiden Variablen sofort durch bloßes Addieren „wegfällt", muss man eine der Gleichungen (oder beide Gleichungen) vor dem Addieren zunächst mit einem geeigneten Faktor (bzw. mit geeigneten Faktoren) multiplizieren.

Natürlich führt jedes dieser drei Verfahren zur gleichen Lösungsmenge.

Beispiel:

I	–3x – 11y = 23	**| · 5**
II	5x – 7y = 63	**| · 3**
I'	–15x – 55y = 115	
II'	15x – 21y = 189	
I' + II'	–76y = 304	I :(–76)
	y = – 4	

In Gleichung II eingesetzt:
5x – 7·(–4) = 63
5x + 28 = 63
5x = 35
x = 7
$\mathbb{L}$ = {(7 | –4)}

delta8
Seite 73ff

Lineare Gleichungs-Systeme (III)

Ein lineares Gleichungssystem kann auch aus **drei** linearen Gleichungen mit **drei** Variablen bestehen.

Beispiel:

(I) $2x + 3y + 2z = 3$
(II) $x + 4y + 4z = -2$
(III) $5x + 3y - z = 0$

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Mit drei Variablen

Lösungsverfahren:

Zuerst eliminiert man aus zwei Gleichungen eine der drei Unbekannten. Das entstandene Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ist dann wie gewohnt zu lösen. Am Ende berechnet man noch den Wert der dritten Unbekannten.

… z. B. mit dem Einsetzverfahren: aus (II) folgt $x = -2 - 4y - 4z$

Einsetzen in I) ergibt $\mathbf{2(}-2 - 4y - 4z\mathbf{) + 3y + 2z = 3}$
$-4 - 8y - 8z + 3y + 2z = 3$
$\underline{-5y - 6z = 7 \qquad (I^*)}$

Einsetzen in III) ergibt $\mathbf{5(}-2 - 4y - 4z\mathbf{) + 3y - z = 0}$
$-10 - 20y - 20z + 3y - z = 0$
$\underline{-17y - 21z = 10 \qquad (III^*)}$

Aus I und III wird x eliminiert

$3{,}5 \cdot (I^*)$ ergibt $-17{,}5y - 21z = 24{,}5 \qquad (I^{**})$

$(III^*) - (I^{**}) \qquad 0{,}5y = -14{,}5$

$y = -29 \quad \Rightarrow \quad (\text{in } I^*) \quad z = 23$

$\Rightarrow \quad (\text{in II}) \quad x = -2 - 4(-29) - 4(23) = 22$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(22;-29;23)\}}}$

… z. B. mit dem Additionsverfahren:

$I + 2 \cdot III) \qquad 12x + 9y = 3$
$\underline{4x + 3y = 1 \qquad (IV)}$
$II + 4 \cdot III) \quad \underline{21x + 16y = -2 \qquad (V)}$

Es werden zwei Gleichungen ohne z erzeugt

$16 \cdot (IV) - 3 \cdot (V) \quad x = 22 \quad \Rightarrow \quad \ldots$

Beispiel:

(I) $x - 2y - z = 1$
(II) $-x + y + 2z = 2$
(III) $-2x + 4y + 2z = 6$

Es werden zwei Gleichungen ohne x erzeugt…

$(I)+(II) \qquad -y + z = 3$
$2 \cdot (I)+(III) \qquad 0 = 8 \quad ↯ \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$

NEU
delta9
Seite 94ff

Geld **GRÖSSEN** delta5 Seite 14

Euro: 1 € = 100 ct Cent: 1 ct = 0,01 €

Beispiele: 325 ct = 3,25 € 432 ct = 4,32 €
4014 ct = 40,14 € 5 € 3 ct = 503 ct

Länge **GRÖSSEN** delta5 Seite 146

10 km	**km**	100 m	10m	**m**	**dm**	**cm**	**mm**

1 km = 1 000 m
Kilometer (km)

1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm
Meter (m)

1 dm = 10 cm = 100 mm
Dezimeter (dm)

1 cm = 10 mm
Zentimeter (cm)

1 m = 0,001 km
1 cm = 0,1 dm = 0,01 m

1 dm = 0,1 m
1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m

Masse **GRÖSSEN** delta5 Seite 148

t	100 kg	10 kg	**kg**	100 g	10 g	**g**	100 mg	10 mg	**mg**

1 t = 1 000 kg Tonne (t) 1 kg = 0,001 t

1 kg = 1 000 g Kilogramm (kg) 1 g = 0,001 kg

1 g = 1 000 mg Gramm (g) 1 mg = 0,001 g Milligramm (mg)

Zeit **GRÖSSEN** delta5 Seite 150

1 a = 12 Monate 1 d = 24 h (Tag)

1 a = 52 Wochen 1 h = 60 min (Stunde)

1 a = 365 d (Schaltjahr: 366 d) 1 min = 60 s (Minute, Sekunde)

Fläche **GRÖSSEN** delta5 Seite 178

km²	10 ha	**ha**	10 a	**a**	10 m²	**m²**	10 dm²	**dm²**	10 cm²	**cm²**	10 mm²	**mm²**

1 km^2 = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m^2 Quadratkilometer
1 ha = 100 a = 10 000 m^2 Hektar
1 a = 100 m^2 Ar

1 m^2 = 100 dm^2 = 10 000 cm^2 = 1 000 000 mm^2; Quadratmeter
1 dm^2 = 100 cm^2 = 10 000 mm^2 Quadratdezimeter
1 cm^2 = 100 mm^2 Quadratzentimeter

1 ha = 0,01 km^2
1 a = 0,01 ha = 0,0001 km^2
1 m^2 = 0,01 a = 0,0001 ha = 0,000001 km^2

1dm^2 = 0,01 m^2
1 cm^2 = 0,01 dm^2 = 0,0001 m^2
1 mm^2 = 0,01 cm^2 = 0,0001 dm^2 = 0,000001 m^2 Quadratmillimeter

Geschwindigkeit

$$1\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad 1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{18}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Volumen

GRÖSSEN

100 m^3	10 m^3	m^3	100 dm^3	10 dm^3	dm^2	100 cm^3	10 cm^3	cm^3	100 mm^3	10 mm^3	mm^3

1 km^3 = 1 000 000 000 m^3 — Kubikkilometer
1 m^3 = 1 000 dm^3 = 1 000 000 cm^3 = 1 000 000 000 mm^3 — Kubikmeter
1 dm^3 = 1 000 cm^3 = 1 000 000 mm^3 — Kubikdezimeter
1 cm^3 = 1 000 mm^3 — Kubikzentimeter

1 m^3 = 0,000 000 001 km^3
1dm^3 = 0,001 m^3
1 cm^3 = 0,001 dm^3 = 0,000 001 m^3
1 mm^3 = 0,001 cm^3 = 0,000 001 dm^3 = 0,000 000 001 m^3 — Kubikmillimeter

1 hl = 100 l — Hektoliter
10 hl = 1000 l = 1 000 dm^3 = 1 m^3
1 l = 1 dm^3 = 0,01 hl — Liter
1 ml = 1 cm^3 = 0,001 l — Milliliter

delta6
Seite 152/160

Dreisatz

RECHNEN MIT GRÖSSEN

Gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen ... einer Größe das Doppelte, Dreifache, Vierfache ... einer anderen Größe, so kann man von einem Vielfachen der einen Größe auf das entsprechende Vielfache der anderen Größe schließen.

Eiskugeln	Preis
1	0,70 €
2	1,40 €
4	2,80 €
8	5,60 €

Beispiele:

1) Herr Maier zahlt für 25 Liter Benzin 29,75 €. Wie viel kosten 40 Liter?

Lösung: 25 Liter kosten 29,75 €.
1 Liter kostet (29,75 € : 25 =) 1,19 €
(„Schluss auf die Einheit").
40 Liter kosten dann (40 • 1,19 € =) 47,60 €.

2) Frau Maier erbt 30600 € (das sind 45% des gesamten Vermögens) von ihrem Opa. Wie groß war das Vermögen?

Lösung: 45% des Vermögens entsprechen 30600 €.
1 % seines Monatsgehalts entspricht (30600 € : 45 =) 680 €
(„Schluss auf die Einheit").
100% des Vermögens entsprechen somit (100 • 680 €=) 68000 €.

delta6
Seite 220

Addieren und Subtrahieren von Größen in Kommaschreibweise
- ✓ Alle Größen müssen in der gleichen Maßeinheit angegeben werden.
- ✓ Es wird stellenweise addiert bzw. subtrahiert.
- ✓ Im Endergebnis wird das Komma an die entsprechende Stelle gesetzt.

Beispiele:

2,950 kg	3,860 kg
+ 0,183 kg	- 0,073 kg
2,767 kg	3,787 kg

Multiplizieren von Größen mit natürlichen Zahlen
- ✓ Die Maßzahl sollte eine natürliche Zahl sein.
  Notfalls die Größe in eine kleinere Einheit umwandeln.
- ✓ Die beiden natürlichen Zahlen multiplizieren.
- ✓ Den Produktwert in eine größere Maßeinheit umwandeln
  (unter Verwendung der Kommaschreibweise).

Beispiel: 8 • 2,84 kg = 8 • 2840 g = 22 720 g = 22,72 kg

Multiplizieren von Größen mit Zehnerstufenzahlen
- ✓ Das Komma bei der gegebenen Größe um so viele Stellen nach **rechts** verschieben, wie die Zehnerstufenzahl Nullen besitzt.

Beispiel: 1 000 • 5,8572 km = 5857,2 km
(Das Komma ist um drei Stellen nach rechts gerückt.)

Dividieren von Größen durch natürliche Zahlen
- ✓ Die Maßzahl sollte eine natürliche Zahl sein.
  Notfalls den Dividenden in eine kleinere Einheit umwandeln.
- ✓ Die beiden natürlichen Zahlen dividieren.
- ✓ Den Quotientenwert in eine größere Maßeinheit umwandeln
  (unter Verwendung der Kommaschreibweise).

Beispiel: 19,76 €: 13 = 1 976 ct : 13 = 152 ct = 1,52€

Dividieren von Größen durch Zehnerstufenzahlen
- ✓ Das Komma im Dividenden um so viele Stellen nach **links** verschieben, wie die Zehnerstufenzahl Nullen besitzt.

Beispiele: 8345,7 km : 1 00 = 83,457 km.
(Das Komma ist um zwei Stellen nach links gerückt.)

RECHNEN MIT GRÖSSEN

delta5
Seite 152ff

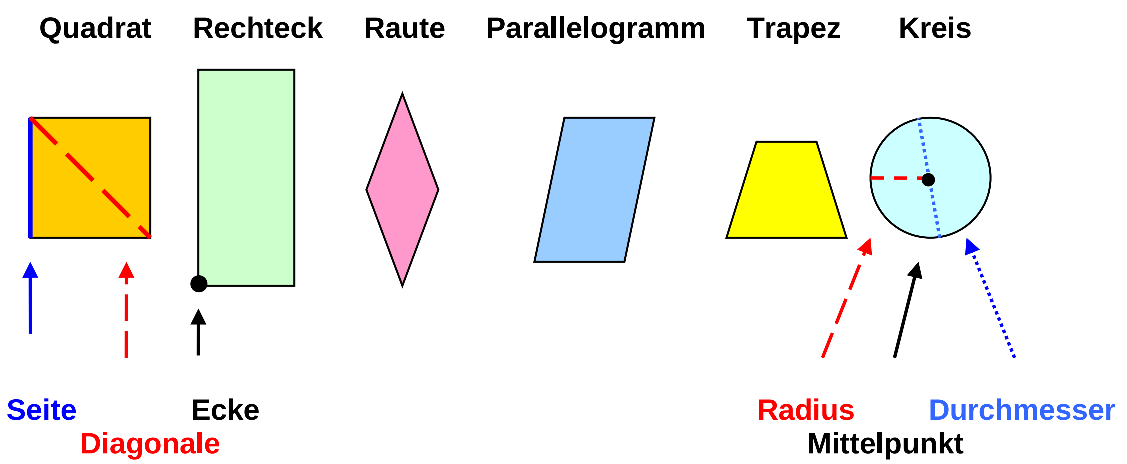
Maßstab

Beispiele:

Maßstab	**1 : 30**	**1 : 80 000**	**2 : 1**
Länge der Strecke in Wirklichkeit	90 m	16 km	13 mm
Länge der Strecke in der Abbildung	(90 m : 30 =) 3 m	(16 km : 80 000 =) 20 cm	(13 mm • 2 =) 26 mm
Vergrößerung oder Verkleinerung?	Verkleinerung	Verkleinerung	Vergrößerung

RECHNEN MIT GRÖSSEN

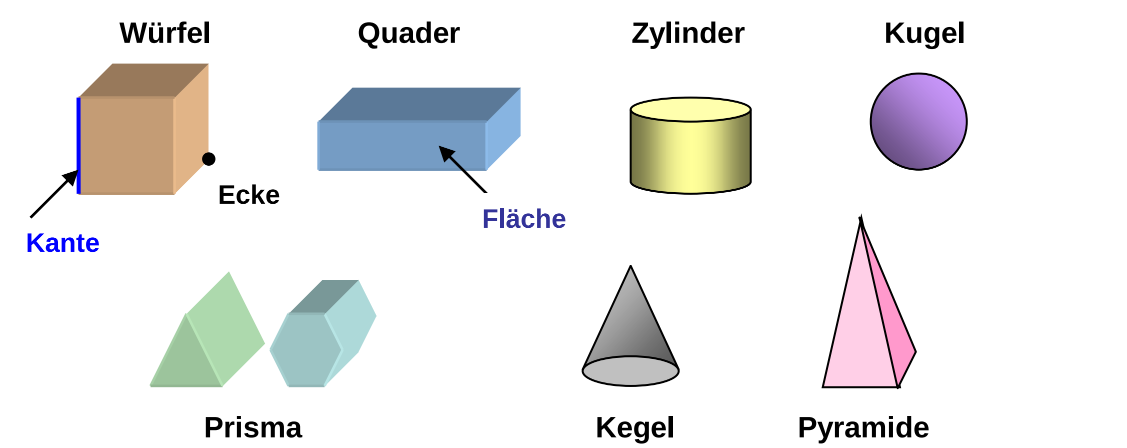
delta5
Seite 164



Geometrische Grundfiguren

GEOMETRIE

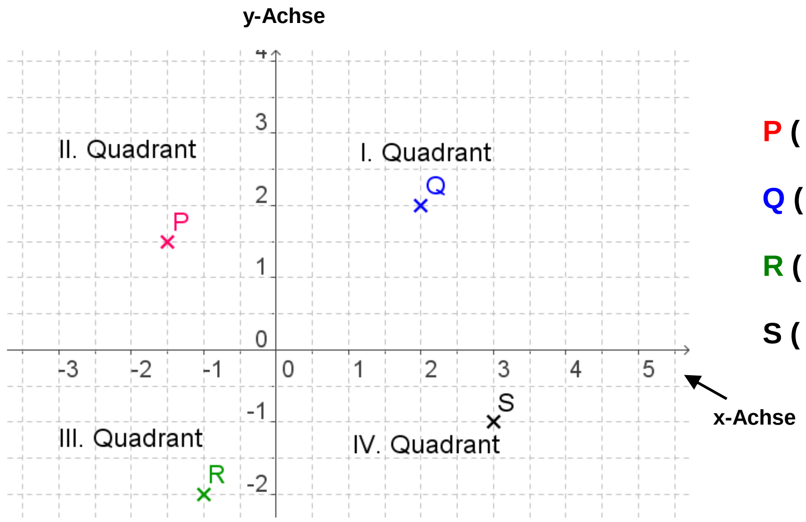
delta5
Seite 72



Geometrische Grundkörper

GEOMETRIE

delta5
Seite 72



x-Koordinate

P (-1,5 | 1,5)

Q (2 | 2)

R (-1 | -2)

S (3 | -1)

y-Koordinate

Koordinaten-system

GEOMETRIE

delta5
Seite 86

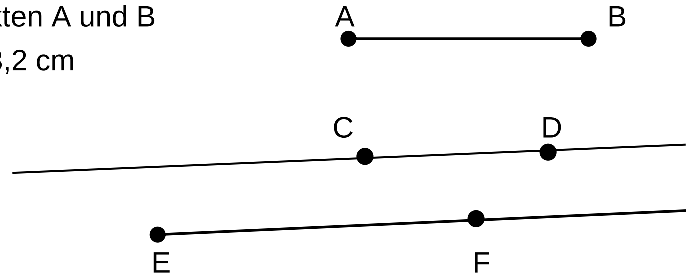
Strecke, Gerade, Halbgerade

GEOMETRIE

Strecke **[AB]** mit den Endpunkten A und B
und der Streckenlänge $\overline{AB} = 3{,}2$ cm

Gerade **CD**

Halbgerade (Strahl) **[EF**
mit Anfangspunkt E



delta5
Seite 74

Senkrecht, parallel

GEOMETRIE

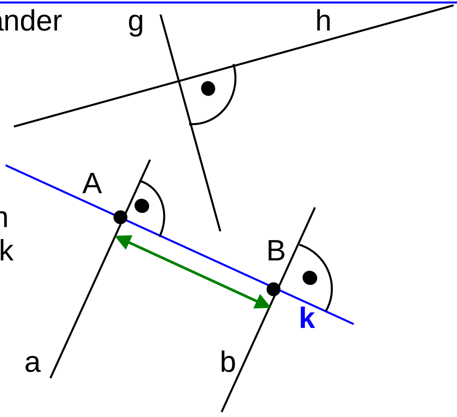
Geraden, Halbgeraden oder Strecken, die miteinander einen rechten Winkel bilden, stehen **aufeinander senkrecht.**

Schreibweise: $g \perp h$

Zwei Geraden a und b (der Zeichenebene) heißen **zueinander parallel**, wenn es eine dritte Gerade k gibt, die auf jeder der beiden senkrecht steht.

Schreibweise: $a \parallel b$

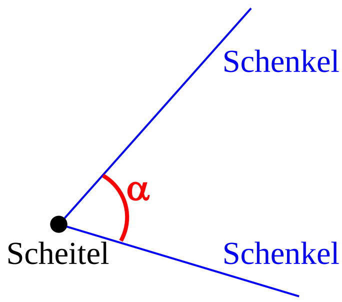
Abstand d der Geraden a und b: **d =** $\overline{AB}$

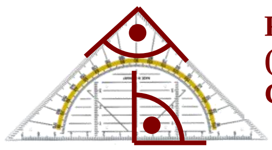


delta5
Seite 76

Winkel (I)

GEOMETRIE

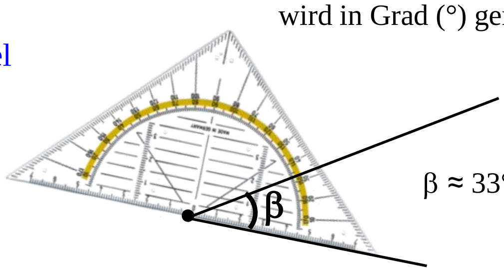




Rechte Winkel
(90°) am
Geodreieck

Die Größe eines Winkels
wird in Grad (°) gemessen.

Winkel messen:

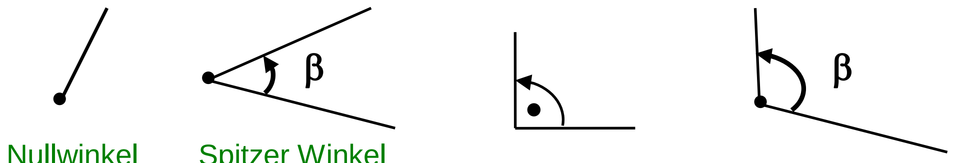


$\beta \approx 33°$

delta5
Seite 82

Winkel (II) Bezeichnungen

GEOMETRIE

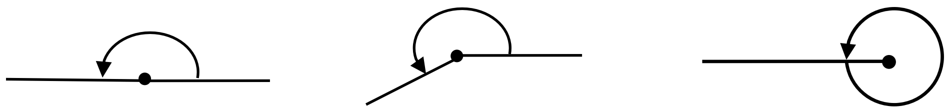


Nullwinkel $\beta = 0°$

Spitzer Winkel $0° < \beta < 90°$

Rechter Winkel $\beta = 90°$

Stumpfer Winkel $90° < \beta < 180°$

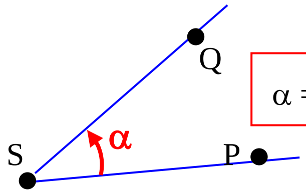


Gestreckter Winkel $\beta = 180°$

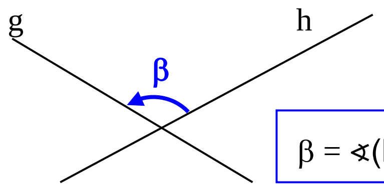
Überstumpfer Winkel $180° < \beta < 360°$

Vollwinkel $\beta = 360°$

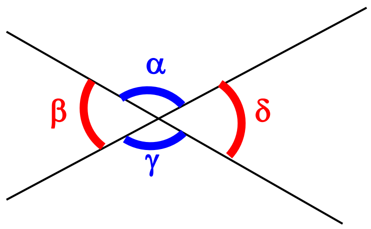
delta5
Seite 82



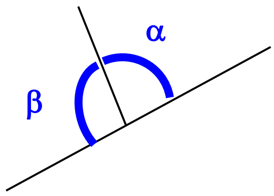
$\alpha = ∢PSQ$



$\beta = ∢(h;g)$

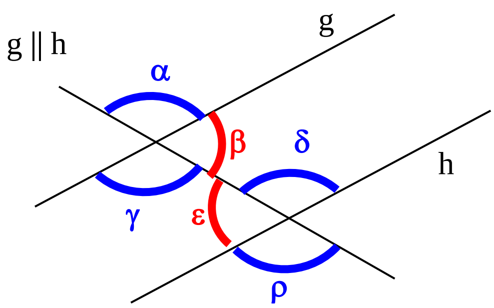


Scheitelwinkel sind gleich groß:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$



Nebenwinkel ergeben zusammen 180°:
$\alpha + \gamma = 180°$

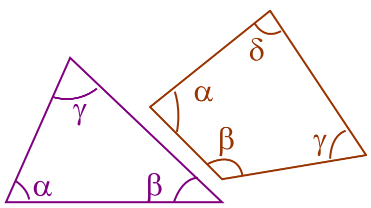
delta7
Seite 38



Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß:
$\alpha = \rho$ oder $\gamma = \delta$ oder $\beta = \varepsilon$

Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß:
$\alpha = \delta$ oder $\gamma = \rho$

delta7
Seite 42



Die **Winkelsumme** der Innenwinkel …

…jedes Dreiecks beträgt 180°; $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

…jedes Vierecks beträgt 360°; $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$

…jedes n-Ecks beträgt $(n-2)\cdot 180°$ $(n>2)$

delta7
Seite 46 / 52

Achsensymmetrie

Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen; die Faltkante heißt dann **Symmetrieachse**.

Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.

$$\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$$
$$r = r^*$$

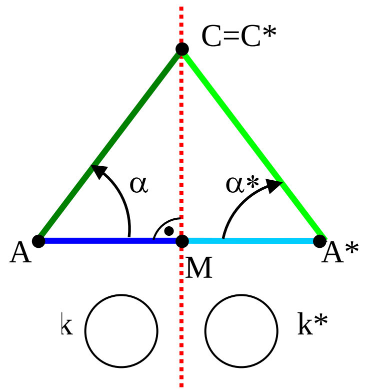
Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

$$\overline{AM} = \overline{MA^*}$$



GEOMETRIE

delta5
Seite 92

delta7
Seite 10 ff

Punktsymmetrie

Wenn eine Figur bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z **(Symmetriezentrum)** mit sich zur Deckung kommt, so heißt diese Figur **punktsymmetrisch.**

Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und zueinander parallel.

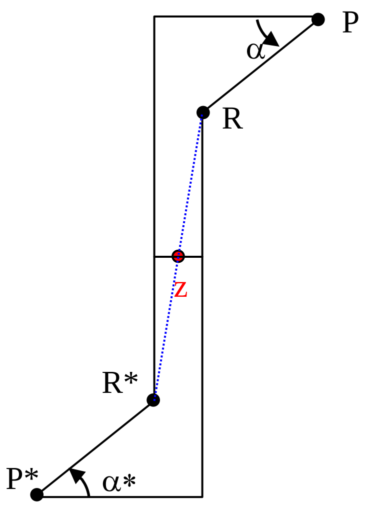
$$\overline{PR} = \overline{P^*R^*}$$
$$PR \parallel P^*R^*$$

Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß und haben gleichen Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.

$$\overline{ZR} = \overline{ZR^*}$$

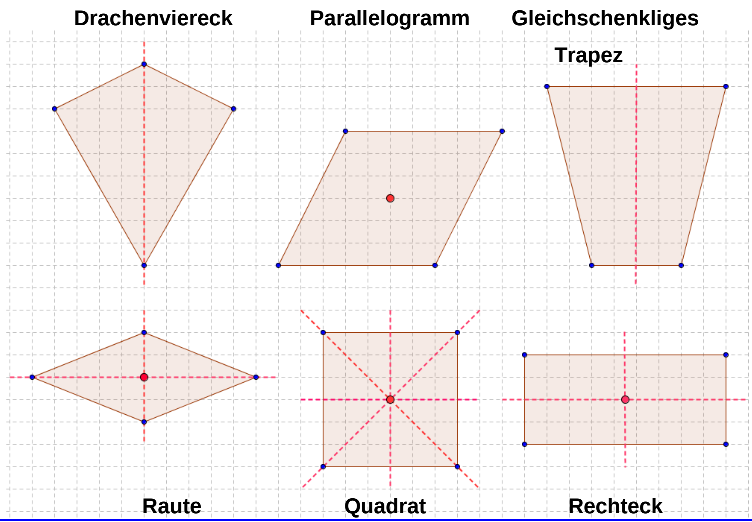


GEOMETRIE

delta5
Seite 92

delta7
Seite 24 ff

Symmetrische Vierecke



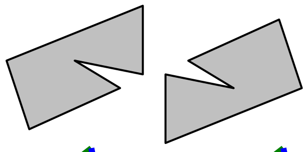
GEOMETRIE

delta5
Seite 72

delta7
Seite 28 ff

Kongruenz

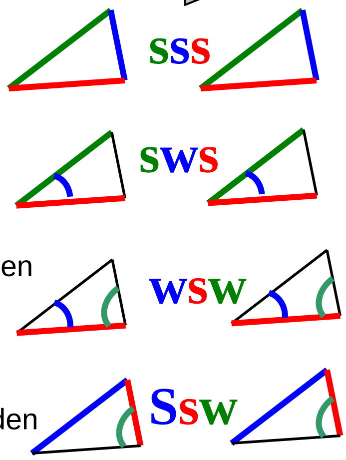
Lassen sich zwei Figuren vollständig miteinander zur Deckung bringen, so heißen sie **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent.**



Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie…

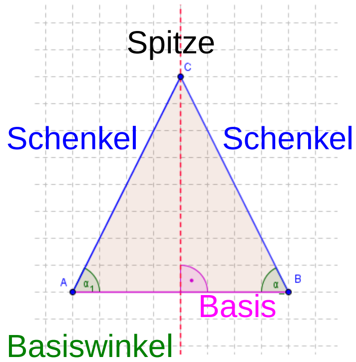
- ✓ in den Längen der drei Seiten übereinstimmen **(sss-Satz).**
- ✓ in den Längen von zwei Seiten und in der Größe von deren Zwischenwinkel übereinstimmen **(sws-Satz).**
- ✓ in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen **(wsw-Satz).**
- ✓ in den Längen zweier Seiten und in der Größe des der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels übereinstimmen **(SsW-Satz).**



GEOMETRIE

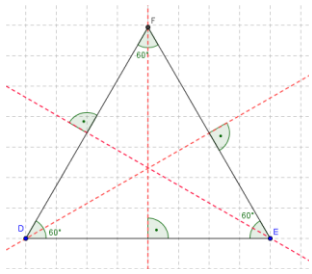
delta7
Seite 148 ff

Besondere Dreiecke



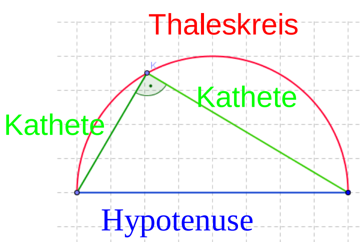
Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen **gleichschenklig.**

Eigenschaften:
- ✓ Zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel).
- ✓ Die der Basis anliegenden Winkel (Basiswinkel) sind gleich groß.
- ✓ Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze und halbiert die Basis rechtwinklig.



Gleichseitige Dreiecke haben drei gleich lange Seiten.

Eigenschaften:
- ✓ Alle Innenwinkel messen 60°.
- ✓ Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen; sie halbieren die Innenwinkel und halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig.



Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, heißen **rechtwinklig.**

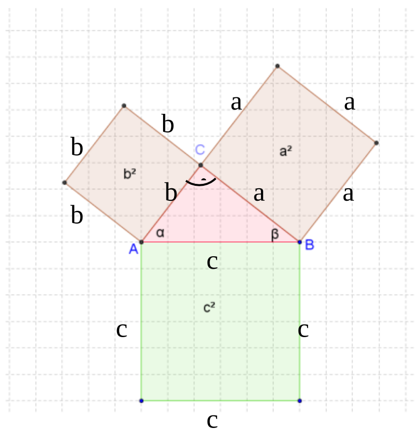
Eigenschaften:
- ✓ Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser **(Thaleskreis).**
- ✓ Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite [AB] als Durchmesser liegt, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig und C der Scheitel des rechten Winkels.

delta7
Seite160 ff

GEOMETRIE

delta7
Seite 166 ff

Ein alter und berühmter Satz aus der Geometrie zeigt die Beziehung zwischen der Länge der Hypotenuse und den Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck:



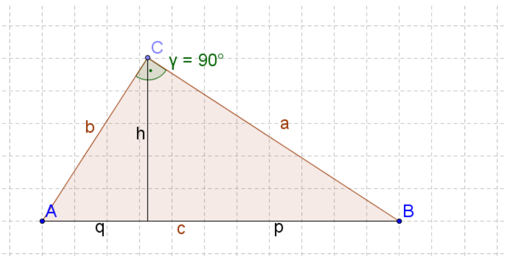
Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

In Worten :
In einem rechtwinkligen Dreieck haben die beiden Quadrate über den beiden Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse!

Kathetensatz : $a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$

Höhensatz : $h^2 = q \cdot p$

Satz des Pythagoras – Kehrsatz:
Gilt für die Längen a, b und c in einem Dreieck die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.



Satz von Pythagoras

Höhensatz

Kathetensatz

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 29 ff

$$\textbf{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}$$

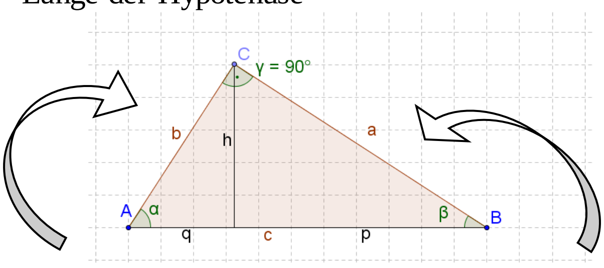
$$\textbf{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\textbf{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$



b ist Gegenkathete von β und Ankathete von α

a ist Gegenkathete von α und Ankathete von β

Tangens…
Sinus…
Kosinus…

…eines Winkels

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 125 ff

Es gilt: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **und** $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Außerdem: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ **und** $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
sin φ	$0 = 1/2\sqrt{0}$	$1/2 = 1/2\sqrt{1}$	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	$1 = 1/2\sqrt{4}$
cos φ	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0
tan φ	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

tan, sin, cos

Beziehungen

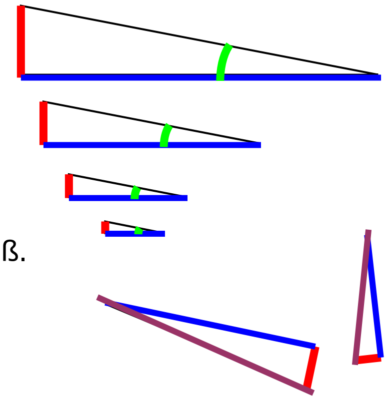
Besondere Winkel

NEU
delta9
Seite 134 ff

Ähnlichkeit

GEOMETRIE

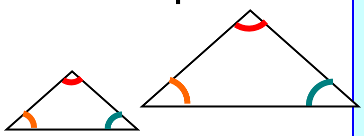
Wird eine Originalfigur im Maßstab a ($a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$) vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur und die Originalfigur zueinander **ähnlich.**
Der Maßstab a heißt **Ähnlichkeitsfaktor.**



Für zueinander ähnliche Figuren gilt:
- Einander entsprechende **Winkel** sind stets gleich groß.
- Längenverhältnisse einander entsprechender Strecken sind stets gleich.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in allen **Längenverhältnissen entsprechender Seiten** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in den Größen aller **Winkel** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

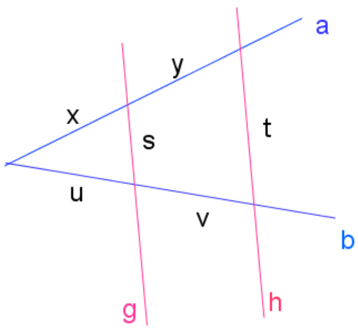


delta8
Seite 160 ff

Strahlensätze

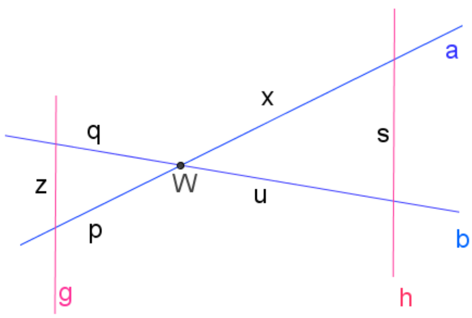
GEOMETRIE

1. Strahlensatz
Wenn zwei Halbgeraden bzw. zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen irgendwelcher zwei Abschnitte auf der einen (Halb-) Geraden ebenso wie die Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der anderen (Halb-) Geraden.



Beispiel: $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ oder $\frac{x}{p} = \frac{u}{q}$

***2.* Strahlensatz**
Wenn zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen der Parallelstrecken wie die Längen der vom Punkt W bis zu ihnen hin verlaufenden Abschnitte auf der einen Geraden:



Beispiel: : $\frac{s}{t} = \frac{u}{u+v}$ oder $\frac{s}{z} = \frac{x}{p}$

Es gilt auch der **Kehrsatz des 1. Strahlensatzes:**
Werden zwei Geraden a und b, die einander im Punkt W schneiden von zwei Geraden g und h so geschnitten, dass das Verhältnis der Längen irgendwelcher zweier Abschnitte auf der Geraden a stets gleich dem Verhältnis der Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der Geraden b ist, dann sind die beiden Geraden g und h zueinander parallel.

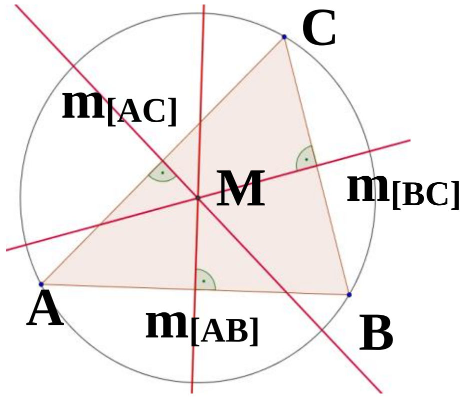
Der **Kehrsatz des *2.* Strahlensatzes** gilt **nicht.**

delta8
Seite 145 ff

Besondere Linien im Dreieck

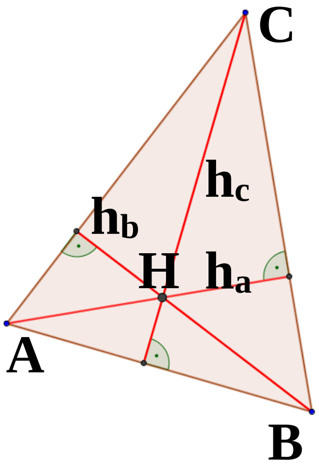
Alle Punkte (der Zeichenebene), die von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt sind, liegen
auf der **Mittelsenkrechten** (dem **Mittellot**) $m_{[AB]}$
ihrer Verbindungsstrecke.

Die drei Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$, $m_{[BC]}$ und $m_{[CA]}$ eines Dreiecks ABC schneiden einander stets in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des **Umkreises** dieses Dreiecks. Die Punkte A, B und C sind von M gleich weit entfernt.



delta7
Seite180

GEOMETRIE



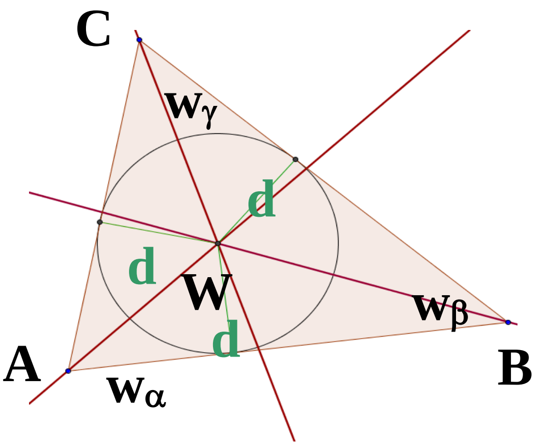
Eine Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet, heißt **Höhe** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Höhen h_a, h_b und h_c; sie schneiden einander in einem Punkt H.

delta7
Seite 184

Eine Gerade, die einen Dreiecksinnen-winkel halbiert, heißt **Winkelhalbierende** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Winkelhalbierende w_α w_β und w_γ; sie schneiden einander in einem Punkt W, der von den drei Seiten den gleichen Abstand d besitzt.
W ist der Mittelpunkt des **Innkreises**.



delta7
Seite 188

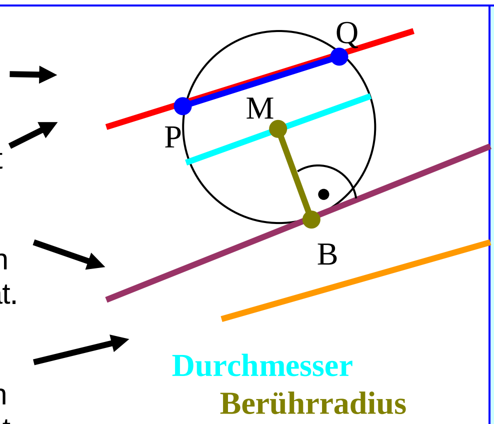
Kreis und Gerade

Eine Gerade heißt **Sekante** eines Kreises, wenn sie diesen Kreis in zwei Punkten schneidet.

Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt **Sehne ([PQ]).**

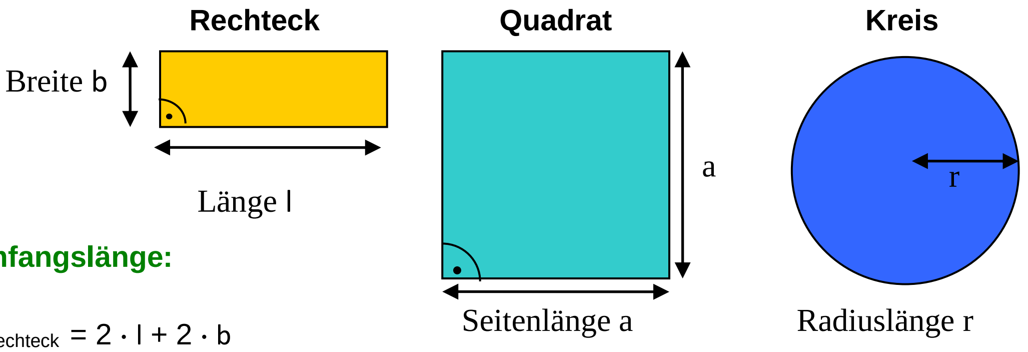
Eine Gerade heißt **Tangente** eines Kreises, wenn sie mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat.
Dieser Punkt heißt **Berührpunkt (B).**

Eine Gerade heißt **Passante** eines Kreises, wenn sie mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat.



GEOMETRIE

delta7
Seite 170 ff



Umfangslänge:

$U_{Rechteck} = 2 \cdot l + 2 \cdot b$

$= 2 \cdot (l + b)$

$U_{Quadrat} = 4 \cdot a$

$U_{Kreis} = 2 \cdot r \cdot \pi$

Im Beispiel: $U_{Rechteck} = 2 \cdot 1\text{ cm} + 2 \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{8\text{ cm}}}$

$U_{Quadrat} = 4 \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{12\text{ cm}}}$

$U_{Kreis} = 2 \cdot 1{,}5\text{ cm} \cdot \pi \approx \underline{\underline{9{,}42\text{ cm}}}$

Kreiszahl

$\pi \approx 3{,}14159265$

Flächeninhalt:

$A_{Rechteck} = l \cdot b$
(„Länge mal Breite“)

$A_{Quadrat} = a \cdot a = a^2$

$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Im Beispiel:

$A_{Rechteck} = 1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{3\text{ cm}^2}}$

$A_{Quadrat} = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{9\text{ cm}^2}}$

$A_{Kreis} = (1{,}5\text{cm})^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{7{,}07\text{ cm}^2}}$

Umfangslänge Flächeninhalt

GEOMETRIE

delta5
Seite 158

delta8
Seite 14ff

delta5
Seite 182

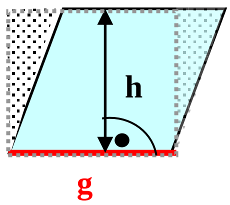
delta8
Seite 38ff

Parallelogramm:
Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel.

Seitenlänge g („Grundseite“) – zugehörige Höhe h

$$\mathbf{A_{Parallelogramm} = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2}$$

$$\mathbf{U_{Parallelogramm} = 2g_1 + 2g_2 = 2(g_1 + g_2)}$$



Flächeninhalt Parallelogramm

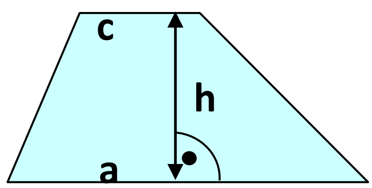
GEOMETRIE

delta6
Seite 130

Trapez:
Zwei gegenüberliegende Seiten („Grundseiten“) sind parallel (hier a und c).

Höhe h: Abstand der parallelen Grundseiten

$$\mathbf{A_{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h$$



Flächeninhalt Trapez

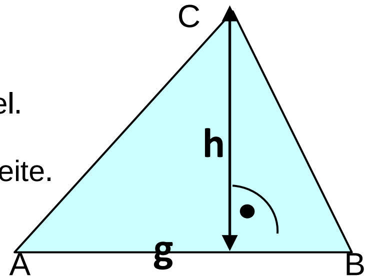
GEOMETRIE

delta6
Seite 138

Dreieck:

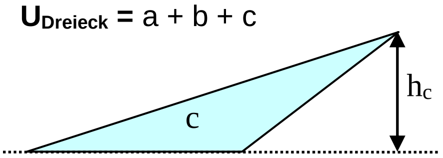
Drei Ecken – drei Seiten („Grundseiten“) – drei Innenwinkel.

Höhe h: Abstand der Ecke von der gegenüberliegenden Seite.



$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$U_{Dreieck} = a + b + c$



Bei manchen Dreiecken kann die Höhe auch außerhalb des Dreiecks liegen.

Flächeninhalt Dreieck

GEOMETRIE

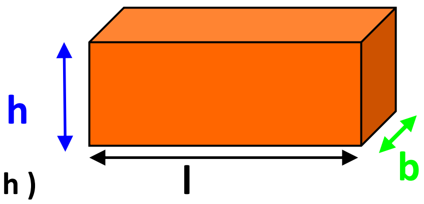
delta6
Seite 136

Quader:

Länge **l** , Breite **b** , Höhe **h**

Volumen: $V_{Quader} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}$

Oberflächeninhalt: $A_{Quader} = 2 \cdot (\mathbf{l} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h})$

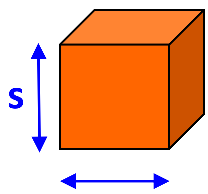


Würfel:

Kantenlänge s

Volumen: $V_{Würfel} = s \cdot s \cdot s = s^3$

Oberflächeninhalt: $A_{Würfel} = 6 \cdot s^2$



Volumen und Oberflächeninhalt (I)

Quader

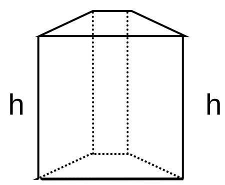
GEOMETRIE

delta6
Seite 146/152/160

Gerades Prisma:

Grundfläche und Deckfläche sind kongruente n-Ecke und zueinander parallel.

Mantel: Alle Seitenflächen (Rechtecke) zusammen.

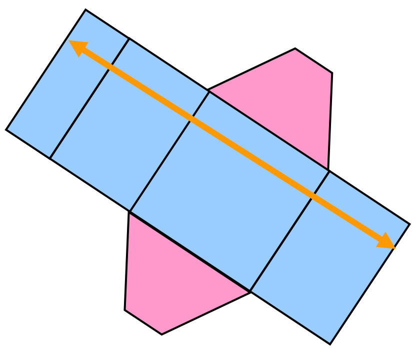


Volumen: $V_{Prisma} = G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Prisma} = 2 \cdot G + M$

$= 2 \cdot G + U \cdot h$

(**U: Umfangslänge**)



Volumen und Oberflächeninhalt (II)

Gerades Prisma

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 166f

Gerader Kreiszylinder:

Grundfläche und Deckfläche sind kongruente Kreise

und zueinander parallel. $G = r^2 \cdot \pi$

Mantel: Seitenfläche (Rechteck)

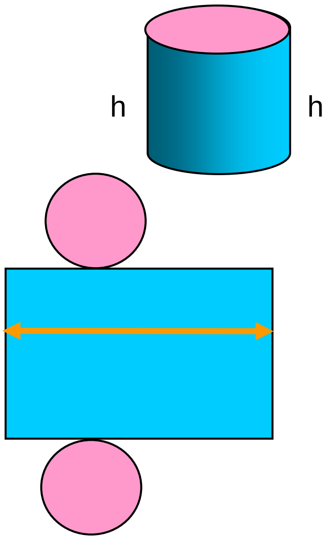
$M = U \cdot h = \mathbf{2} \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Zylinder} = 2 \cdot G + M$

$= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen: $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

(**U: Umfangslänge**)



Volumen und Oberflächeninhalt (III)

Gerader Kreiszylinder

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 174ff

Pyramide:

Grundfläche: Ein n-Eck (n>2)

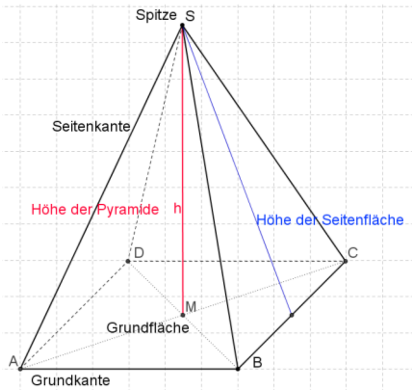
Seitenflächen: n Dreiecke

Mantel: Alle Seitenflächen (Dreiecke) zusammen.

Gerade Pyramide: Alle Seitenkanten gleich lang.

Volumen: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Pyramide} = G + M$



Volumen und Oberflächeninhalt (IV)

Pyramide

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 178ff

Gerader Kreiskegel:

Grundfläche: Kreis $G = r^2\pi$

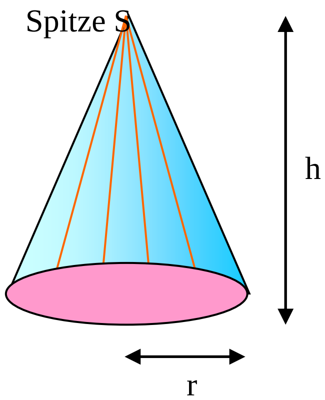
Mantel: Kreissektor $M = r\pi s$

(s: Länge der Mantellinien)

Volumen: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Kegel} = G + M$

$= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$



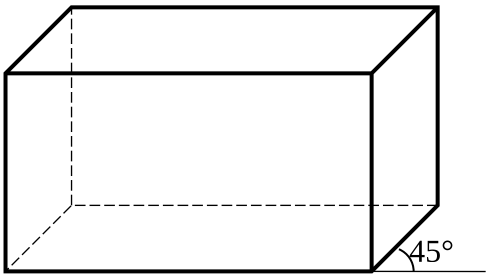
Volumen und Oberflächeninhalt (V)

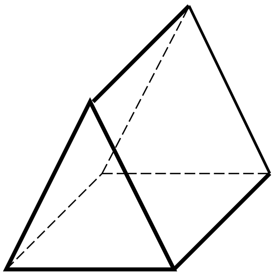
Gerader Kreiskegel

GEOMETRIE

NEU
delta9
Seite 188ff

Schrägbild





In einem **Schrägbild** wird ein Körper so gezeichnet, dass man ihn sich räumlich gut vorstellen kann.

Die „nach hinten" verlaufenden Quaderkanten werden schräg und verkürzt, aber zueinander parallel gezeichnet. Häufig trägt man sie unter einem Winkel von 45° und in halber Länge an.

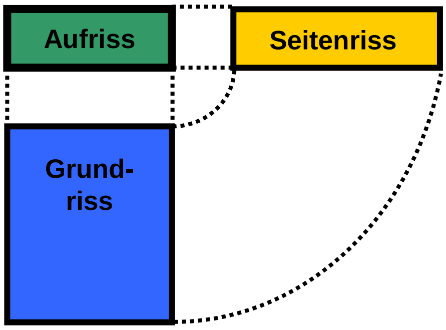
Unsichtbare Kanten werden gestrichelt eingezeichnet.

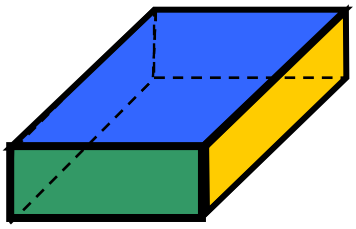
Um eine räumliche Vorstellung von einem Körper zu erhalten, stellt man ihn häufig aus mehreren verschiedenen Richtungen betrachtet dar:

Der **Grundriss** zeigt, wie der Körper (senkrecht) von oben betrachtet aussieht.

Der **Aufriss** zeigt, wie der Körper von vorne betrachtet aussieht.

Ein **Seitenriss** zeigt, wie der Körper von rechts (oder von links) betrachtet aussieht.





GEOMETRIE

delta6
Seite 148/150

NEU
delta9
Seite 164f