

Eine Gleichung besteht aus **zwei Termen**, die miteinander durch ein **Gleichheitszeichen** verbunden sind.

$$x + 3 = 2x - 7$$

Setzt man für die **Variable** eine Zahl in die Gleichung ein, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben.

$$4 + 3 = 2 \cdot 4 - 7$$

$$7 = 1 \quad \text{falsch}$$

Die (vorgegebene) Menge aller Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**.

$$G = \mathbb{N}$$

Die Zahlen der Grundmenge G, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage liefern, heißen **Lösungen** dieser Gleichung.

$$10 + 3 = 2 \cdot 10 - 7$$

$$13 = 13$$

Die Lösungen einer Gleichung fasst man zur **Lösungsmenge IL** dieser Gleichung zusammen.

$$IL = \{10\}$$

Wenn kein Element der Grundmenge G beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, dann ist die Lösungsmenge die **leere Menge**, geschrieben  $\{ \}$  (oder  $\emptyset$ ).

$$G = \{1; 2; 3\}$$

$$x + 3 = 2x - 7$$

$$IL = \{ \}$$

Gleichungen

Grundbegriffe

delta7  
Seite 104-105

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

**Äquivalenzumformungen** sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

$$3x + 1 = 7$$

✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert.

$$3x + 1 = 7 \quad | +3$$

$$3x + 4 = 10$$

✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert.

$$3x + 4 = 10 \quad | -4$$

$$3x = 6$$

✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**.

$$3x = 6 \quad | \cdot 2$$

$$6x = 12$$

✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**.

$$6x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

Beispiele:

a) Grundmenge:  $G = \mathbb{N}$   
 Gleichung:  $x + 12 = 4$   $| -12$   
 Neue Gleichung:  $x = -8$   
 Lösungsmenge:  $IL = \{ \}$  weil  $-8 \notin \mathbb{N}$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

b)  $G = \mathbb{Z}$   
 $4x - 3 = 25 \quad | +3$   
 $4x = 28 \quad | :4$   
 $x = 7 \in \mathbb{Z}$   
 $IL = \{7\}$

c)  $G = \mathbb{Q}$   
 $7x + 4 = 3 - x \quad | +x$   
 $8x + 4 = 3 \quad | -4$   
 $8x = -1 \quad | :8$   
 $x = -0,125$   
 $IL = \{-0,125\}$

**ACHTUNG:** Wird eine **Ungleichung** mit einer **negativen Zahl multipliziert** oder durch eine **negative Zahl dividiert**, so muss man das **Ungleichheitszeichen umdrehen!**

d)  $-4x < 24 \quad | :(-4)$   
 $x > -6$   
 $IL = \{x \mid x > -6\}$  **Mengenschreibweise**  
 $= ] -6 ; +\infty [$  **Intervallschreibweise**

e)  $-x \geq -31 \quad | \cdot (-1)$   
 $x \leq 31$   
 $IL = \{x \mid x \leq 31\}$   
 $= ] -\infty ; 31 ]$

Lösen von Gleichungen (I)

delta7  
Seite 106-119

delta8  
Seite 62-65

Gleichungen, bei denen die Variable in mindestens einem der Nenner auftritt nennt man **Bruchgleichung**.

**Graphische Lösung:**

Man zeichnet zuerst die Funktionsgraphen der beiden Gleichungsseiten. Dann liest man die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte ab.

*Im Beispiel:*

Die Graphen der Funktionen

**f:**  $f(x) = \frac{2}{x}$  und **g:**  $g(x) = \frac{6}{3-x}$

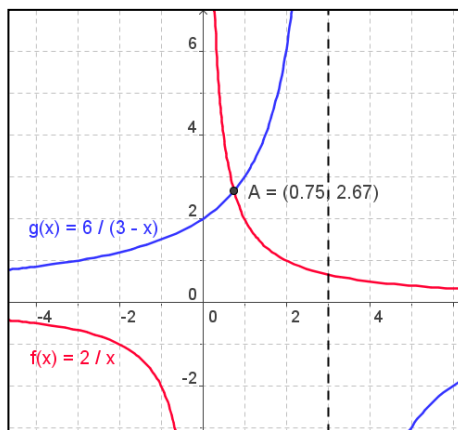
haben nur den Punkt A (0,75 | 2,67)

gemeinsam, die Bruchgleichung hat also die Lösungsmenge **IL** = {0,75}.

Definitionsmenge angeben: **ID** =  $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

*Beispiel:*

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$



**Rechnerische Lösung:**

Beide Seiten der Bruchgleichung mit einem gemeinsamen Nenner (am besten mit dem Hauptnenner) aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen.

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$

HN: (3-x) · x

$$\frac{2 \cdot (3-x) \cdot x}{x} = \frac{6 \cdot (3-x) \cdot x}{3-x}$$

Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen. Prüfen, ob die ermittelte Lösung zur Definitionsmenge gehört.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3-x) &= 6 \cdot x && | \text{TV} \\ 6 - 2x &= 6x && | +2x \\ 6 &= 8x && | :8 \\ x &= 0,75 \end{aligned}$$

Probe machen: **LS:**  $\frac{2}{0,75} = 2\frac{2}{3}$     **RS:**  $\frac{6}{3-0,75} = \frac{6}{2,25} = 2\frac{2}{3}$     **LS = RS ✓**

Lösungsmenge angeben: **IL** = {0,75}.

*Weiteres Beispiel:*

$$\frac{2x+2}{x-6} = \frac{4x-140}{2x}$$

**ID** =  $\mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$

HN:  $2x(x-6)$      $\frac{(2x+2)2x(x-6)}{x-6} = \frac{(4x-140)2x(x-6)}{2x}$

$$(2x+2)2x = (4x-140)(x-6)$$

$$4x^2 + 4x = 4x^2 - 24x - 140x + 840 \quad | -4x^2$$

$$4x = -164x + 840 \quad | +164x$$

$$168x = 840 \quad | :168$$

$$x = 5 \quad \text{IL} = \{5\}.$$

Probe: **LS** = (2 · 5 + 2) : (5 - 6) = 12 : (-1) = -12    **RS** = (4 · 5 - 140) : (2 · 5) = -120 : 10 = -12    **LS = RS ✓**

Lösen von Gleichungen (II)

Bruchgleichungen

**Bruchterm:** Die Variable tritt auch im Nennerterm des Bruchs auf.  $\frac{5x+2}{x-7}$   
 Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur **Definitionsmenge** des Bruchterms.  $ID = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Bruchterme können wie Brüche **erweitert und gekürzt** werden.

**Erweitern:** Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden mit der gleichen Zahl (mit dem gleichen Term) multipliziert.

*Beispiel:*  $\frac{4}{x} = \frac{8}{2x} = \frac{8(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{8(x+1)a}{2x(x+1)a} = \dots$   
 ...mit 2 ...mit (x+1) ...mit a ... erweitert.

**Kürzen:** Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden durch die gleiche Zahl (durch den gleichen Term) dividiert.

*Beispiel:*  $\frac{25x^2y(a+1)}{10x(a+1)z} = \frac{25x^2y}{10xz} = \frac{5x^2y}{2xz} = \frac{5xy}{2z}$   
 ...mit a+1 ...mit 5 ...mit x ... gekürzt.

**Beachte:** Die größtmögliche Definitionsmenge kann sich beim Erweitern bzw. Kürzen eines Bruchterms ändern.

**Addition und Subtraktion** von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

*Beispiel:*  $\frac{8x}{x+2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{8x+2-3x}{x+2} = \frac{5x+2}{x+2}$   $ID = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ungleichnamige Bruchterme werden vorher gleichnamig gemacht.

*Beispiel:*  $\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{3(3x+1)}{3x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{9x+3+2x-1}{3x} = \frac{11x+2}{3x}$   $ID = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Multiplikation und Division** von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert. (KÜRZEN!)

*Beispiel:*  $\frac{8x}{x+2} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{8x \cdot 3}{(x+2) \cdot 4x} = \frac{2 \cdot 3}{(x+2)} = \frac{6}{x+2}$   $ID = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$

Ein Bruchterm wird durch einen zweiten dividiert, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrbuch des zweiten multipliziert.

*Beispiel:*  $\frac{5-x}{x+1} : \frac{3x-6}{x+1} = \frac{5-x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x-6} = \frac{5-x}{3x-6}$   $ID = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

Lösen von Gleichungen (II)  
(Fortsetzung)

Wiederholung Bruchterme

Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, c \in \mathbb{R}$$

nennt man **quadratische Gleichungen**.

**Graphische Lösung:**

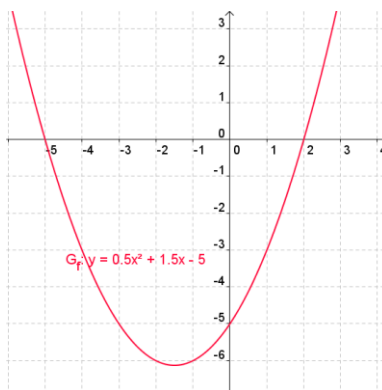
Man kann die Lösungen der Gleichung als Nullstellen des Funktionsgraphen von  $f(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 5$  deuten.

*Im Beispiel:*

Der Graph der Funktion  $f(x)$  hat die beiden Nullstellen  $(-5|0)$  und  $(2|0)$  und die Gleichung somit die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{-5; 2\}$ .

*Beispiel:*

$$0,5x^2 + 1,5x - 5 = 0$$



**Rechnerische Lösung mit Linearfaktoren:**

$(x - 3)(x + 5) = 0$  ergibt ausmultipliziert die Gleichung  $x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$ . Bei der **Linearfaktorzerlegung** links kann man die Lösungen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -5$  ablesen! Somit kann man oft Lösungen erraten:

<i>Beispiele:</i>	$x^2 - 12x + 20 = 0$	$x^2 - 8x = 0$	$x^2 - 49 = 0$
	$(x - 10)(x - 2) = 0$	$x(x - 8) = 0$	$(x - 7)(x + 7) = 0$
	$\mathbb{L} = \{10; 2\}$	$\mathbb{L} = \{0; 8\}$	$\mathbb{L} = \{-7; 7\}$

**Rechnerische Lösung mit der Lösungsformel:**

Die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) lautet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Der Radikand  $b^2 - 4ac$  wird auch **Diskriminante D** genannt.

Ist  $D < 0$ , so gibt es **KEINE** Lösung.  
Ist  $D = 0$ , so gibt es **genau eine** Lösung.  
Im Falle  $D > 0$  existieren **zwei** Lösungen.

*Beispiele:*  $x^2 - 12x + 20 = 0$   
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64 > 0$  also gibt es zwei Lösungen!

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2} = \frac{2(6 \pm 4)}{2} = 6 \pm 4$$

$x_1 = 6 + 4 = 10$  und  $x_2 = 6 - 4 = 2$  also  $\mathbb{L} = \{10; 2\}$

$3x^2 - 30x + 75 = 0$   
 $D = (-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 75 = 900 - 900 = 0$  also gibt es genau eine Lösung!

$$x_{1/2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm 0}{6} = \frac{30}{6} = 5 \quad \text{also} \quad \mathbb{L} = \{5\}$$

Die Gleichung  $-2x^2 + 3x - 7 = 0$  hat wegen  
 $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 9 - 56 = -47 < 0$  keine Lösung, also  $\mathbb{L} = \{\}$

Lösen von Gleichungen (III)

Quadratische Gleichungen

Beispiele und hilfreiche Methoden:

- $3x + 34 = 4(x - 2) - 17 \rightarrow$  **Äquivalenzumformungen** (Lineare Gleichung)
- $12x^7 = 36 \rightarrow$  **Radizieren**  
 $x^7 = 3$  bzw.  $x = \sqrt[7]{3}$
- $3x^2 + 4x = 63 \rightarrow$  **Lösungsformel** (Quadratische Gleichung)
- $3x^5 - 4x^3 + 12x^4 = 0 \rightarrow$  **x ausklammern** (hier  $x^3$ )  
 $x^3 \cdot (3x^2 - 4 + 12x) = 0$   $x_1=0$  , dann  $x_{2/3}$  mit Lösungsformel
- $8x^4 - 5x^2 + 23 = 0 \rightarrow$  **Substitution**  $z:=x^2$   
 $8z^2 - 5z + 23 = 0$  dann Lösungsformel  $z_{1/2}$   
 (Rücksubstitution nicht vergessen! x gesucht!)
- $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow$  Eine Lösung **raten**, dann **Polynomdivision**  
 ( Siehe Funktionen (IX) – Nullstellen ganzrationaler Funktionen )

Lösen von Gleichungen (IV)

Algebraisch Gleichungen höheren Grades

delta10 Seite 114 ff

Gleichungen, bei denen die Variable nur im Exponenten auftritt, heißen **Exponentialgleichungen**.

**Beispiele:** a)  $3^x + 1 = 5$  Graphische Lösung:  $x \approx 1,2$

Rechnerische Lösung:  $3^x + 1 = 5 \Rightarrow 3^x = 4$   
 $x = \log_3 4 \approx 1,262$

b)  $5^{x+2} - 8 = 12$   
 $5^{x+2} = 20$   
 $x + 2 = \log_5 20$   
 $x = \log_5 20 - 2$   
 $\approx -0,1386$

c)  $2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x-1} = 8$   
 $2^x \cdot (2^2 - 6 \cdot 2^{-1}) = 8$   
 $2^x \cdot (2^2 - 3) = 8$   
 $2^x = 8$   
 $x = 3$

d)  $0,05 \cdot 5^{x+2} = 8^x$  (beidseitig logarithmieren – Basis 10)  
 $\log(0,05 \cdot 5^{x+2}) = \log(8^x)$  Rechenregeln für Logarithmus anwenden  
 $\log 0,05 + \log(5^{x+2}) = \log(8^x)$  Rechenregeln für Logarithmus anwenden  
 $\log 0,05 + (x+2) \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$  Ausmultiplizieren

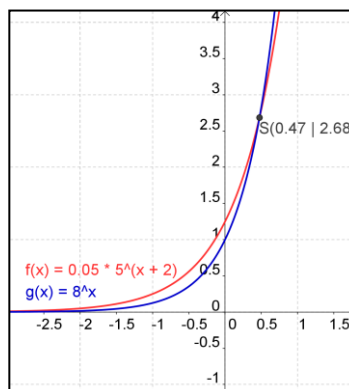
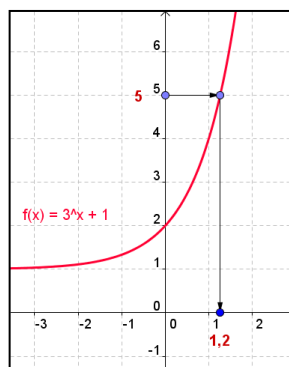
$$\log 0,05 + x \cdot \log 5 + 2 \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$$

$$x \cdot \log 5 - x \cdot \log 8 = -2 \cdot \log 5 - \log 0,05$$

$$x \cdot (\log 5 - \log 8) = -2 \cdot \log 5 - \log 0,05$$

$$x = \frac{-2 \cdot \log 5 - \log 0,05}{\log 5 - \log 8} = \frac{\log(5^{-2} : 0,05)}{\log \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{\log 0,8}{\log 0,625} = \log_{0,625} 0,8 \approx 0,47$$



Lösen von Gleichungen (V)

Exponentialgleichungen

delta10 Seite 80 ff

Eine Exponentialgleichung der Form  $e^x = y$  hat die Lösung  $x = \ln y$ .

Folgende Zusammenhänge sind häufig für das Lösen von Gleichungen wichtig:

Für alle  $x > 0$  gilt:  $e^{\ln x} = x$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $\ln(e^x) = x$

**Beispiele:**

**a)**  $e^{x+1} = 10$  |  $\ln \dots$   
 $\ln(e^{x+1}) = \ln(10)$   
 $x + 1 = \ln 10$   
 $x = \ln 10 - 1 \approx 1,3026$

**b)**  $e^{x^2} = 2500$  |  $\ln \dots$   
 $\ln(e^{x^2}) = \ln 2500$   
 $x^2 = \ln 2500$   
 $x = \pm \sqrt{\ln 2500} \approx \pm 2,797$

**c)**  $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$   
 $(e^x)^2 - 5(e^x) + 4 = 0$   
 $z^2 - 5z + 4 = 0$   
 $(z - 1)(z - 4) = 0$   
 $z_1 = 1$  oder  $z_2 = 4$   
 $e^x = 1$  also:  $x_1 = \ln 1 = 0$   
 $e^x = 4$  also:  $x_2 = \ln 4 \approx 1,386$

Substitution:  
 $e^x = z$   
 $\rightarrow$  Quadratische Gleichung (Vieta!)

Rück-Substitution

**d)**  $\ln x = 4$  |  $e^{\dots}$   
 $e^{\ln x} = e^4$   
 $x = e^4$

**e)**  $\ln(2x + e) = 1$  |  $e^{\dots}$   
 $2x + e = e^1$   
 $2x = 0$  bzw.  $x = 0$

**f)**  $(\ln x)^2 - 2 \ln x - 3 = 0$  Faktorisieren! (Vieta)  
 $(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$   
 $\ln x = 3$  also:  $x_1 = e^3$   
 $\ln x = -1$  also:  $x_2 = e^{-1}$

Lösen von Gleichungen (VI)

Exponentialgleichungen

Logarithmusgleichungen

Lambacher Schweizer 11  
 Seite 161 ff

Zwei lineare Gleichungen, die zwei Variable enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.

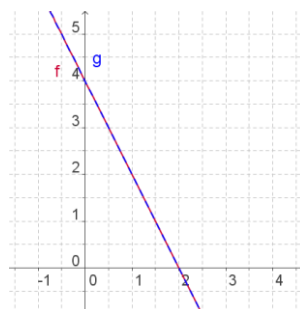
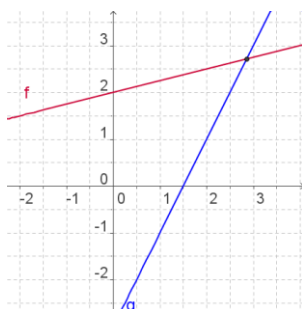
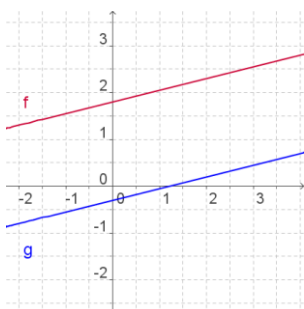
I)  $3y + x = 9 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

II)  $y = 3x - 2 \rightarrow f(x) = 3x - 2$

Die Koordinaten  $x_s = 1,5$ ;  $y_s = 2,5$  des Schnittpunkts S (1,5 | 2,5) der zugehörigen Geraden erfüllen als einzige beide Gleichungen.

Sie bilden zusammen die (einzige) Lösung des Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge also  $IL = \{(1,5 | 2,5)\}$  ist.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden zueinander parallel sind, einander schneiden oder zusammenfallen.



Die Lösung kann **graphisch** gefunden werden, indem man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem einträgt und die Koordinaten ihres Schnittpunkts abliest.

Das **Gleichsetzungsverfahren**:

1. Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen

$$y = -\frac{1}{3}x + 3 \quad \text{und} \quad y = 3x - 2$$

2. Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten

$$-\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 2 \quad | \cdot 3$$

3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält

$$\begin{aligned} -x + 9 &= 9x - 6 & | +x, +6 \\ 15 &= 10x & | :10 \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen

$$y = 3 \cdot 1,5 - 2 = 2,5$$

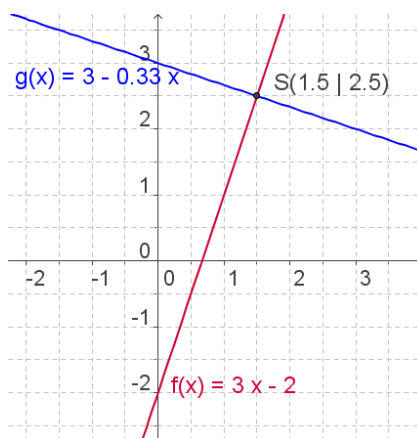
5. Angeben der Lösungsmenge

$$IL = \{(1,5 | 2,5)\}$$

Beispiel:

I)  $3y + x = 9$

II)  $y = 3x - 2$



Lineare Gleichungssysteme (I)

Mit zwei Variablen

Das **Einsetzungsverfahren**:

1. Auflösen einer der Gleichungen nach einer der Variablen

$$3y + x = 9$$

$$y = 3x - 2$$

2. Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung

$$3(3x - 2) + x = 9$$

$$9x - 6 + x = 9$$

$$10x - 6 = 9$$

$$10x = 15$$

$$x = 1,5$$

3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält

4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen

$$y = 3 \cdot 1,5 - 2 = 2,5$$

5. Angeben der Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(1,5 | 2,5)\}$$

Lineare Gleichungssysteme (II)

Mit zwei Variablen

Das **Additionsverfahren**:

Unterscheiden sich bei einem Gleichungssystem die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen, so ist es günstig, die beiden Gleichungen zu addieren, da dann eine der beiden Variablen „wegfällt“.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 12x + 7y = 45 \\ \text{II} \quad -5x - 7y = -31 \\ \hline \text{I} + \text{II} \quad 7x = 14 \quad | :7 \\ \quad \quad \quad x = 2 \end{array}$$

In Gleichung I eingesetzt:

$$12 \cdot 2 + 7y = 45$$

$$7y = 21$$

$$y = 3$$

$$\mathbb{L} = \{(2 | 3)\}$$

Verallgemeinerung (siehe unten):

Wenn keine der beiden Variablen sofort durch bloßes Addieren „wegfällt“, muss man eine der Gleichungen (oder beide Gleichungen) vor dem Addieren zunächst mit einem geeigneten Faktor (bzw. mit geeigneten Faktoren) multiplizieren.

Natürlich führt jedes dieser drei Verfahren zur gleichen Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad -3x - 11y = 23 \quad | \cdot 5 \\ \text{II} \quad 5x - 7y = 63 \quad | \cdot 3 \\ \hline \text{I}' \quad -15x - 55y = 115 \\ \text{II}' \quad 15x - 21y = 189 \\ \hline \text{I}' + \text{II}' \quad -76y = 304 \quad | :(-76) \\ \quad \quad \quad y = -4 \end{array}$$

In Gleichung II eingesetzt:

$$5x - 7 \cdot (-4) = 63$$

$$5x + 28 = 63$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

$$\mathbb{L} = \{(7 | -4)\}$$



Ein lineares Gleichungssystem kann auch aus **drei** linearen Gleichungen mit **drei** Variablen bestehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 2x + 3y + 2z = 3 \\ \text{(II)} \quad & x + 4y + 4z = -2 \\ \text{(III)} \quad & 5x + 3y - z = 0 \end{aligned}$$

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

**Lösungsverfahren:**

Zuerst eliminiert man aus zwei Gleichungen eine der drei Unbekannten. Das entstandene Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ist dann wie gewohnt zu lösen. Am Ende berechnet man noch den Wert der dritten Unbekannten.

... z. B. mit dem Einsetzverfahren: aus (II) folgt  $x = -2 - 4y - 4z$

Einsetzen in I) ergibt  $2(-2 - 4y - 4z) + 3y + 2z = 3$

$$\begin{aligned} -4 - 8y - 8z + 3y + 2z &= 3 \\ -5y - 6z &= 7 \quad \text{(I*)} \end{aligned}$$

Einsetzen in III) ergibt  $5(-2 - 4y - 4z) + 3y - z = 0$

$$\begin{aligned} -10 - 20y - 20z + 3y - z &= 0 \\ -17y - 21z &= 10 \quad \text{(III*)} \end{aligned}$$

Aus I und III wird x eliminiert

$$\begin{aligned} 3,5 \cdot \text{(I*)} &\text{ ergibt } -17,5y - 21z = 24,5 \quad \text{(I**) } \\ \text{(III*)} - \text{(I**) } & 0,5y = -14,5 \\ y = -29 &\Rightarrow \text{(in I*) } z = 23 \\ \Rightarrow \text{(in II) } & x = -2 - 4(-29) - 4(23) = 22 \\ \Rightarrow & \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(22; -29; 23)\}}} \end{aligned}$$

... z. B. mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{aligned} \text{I} + 2 \cdot \text{III} & 12x + 9y = 3 \\ \text{II} + 4 \cdot \text{III} & 21x + 16y = -2 \end{aligned}$$

Es werden zwei Gleichungen ohne z erzeugt

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{IV}} 4x + 3y = 1 \\ & \xrightarrow{\text{V}} 21x + 16y = -2 \end{aligned}$$

$$16 \cdot \text{(IV)} - 3 \cdot \text{(V)} \quad x = 22 \Rightarrow \dots$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x - 2y - z = 1 \\ \text{(II)} \quad & -x + y + 2z = 2 \\ \text{(III)} \quad & -2x + 4y + 2z = 6 \end{aligned}$$

Es werden zwei Gleichungen ohne x erzeugt...

$$\begin{aligned} \text{(I)} + \text{(II)} & -y + z = 3 \\ 2 \cdot \text{(I)} + \text{(III)} & 0 = 8 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \emptyset}} \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann durch eine Zuordnung beschrieben werden: Gibt es dabei zu **jedem** zulässigen Wert der ersten Größe **genau einen** Wert der ihr zugeordneten zweiten Größe, so nennt man die Zuordnung eine **Funktion**  $f$ .

Funktionen können z. B. durch **Terme**, durch **Tabellen** oder durch **Schaubilder (Graphen)** beschrieben werden.

Häufig wird die erste Größe, die **unabhängige Variable**, mit  $x$  bezeichnet. Die zweite Größe, die von  $x$  **abhängige Variable**, bezeichnet man als Funktionswert von  $x$ .

Die Menge aller Werte von  $x$  heißt **Definitionsmenge**  $D_f$ , die Menge aller **Funktionswerte** heißt **Wertemenge**  $W_f$ .

Werte von  $x$ , für die der Funktionswert 0 ist, heißen **Nullstellen** der Funktion.

**Beispiel: Zuordnungsvorschrift:**

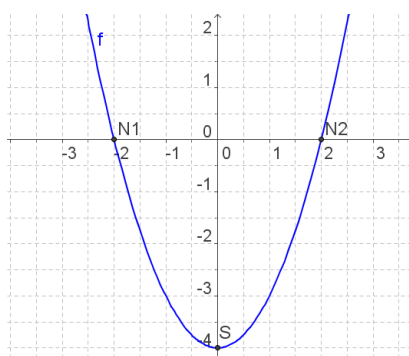
Jeder rationalen Zahl wird der um 4 verminderte Wert ihres Quadrats zugeordnet.

**Funktion  $f$ :**  $f(x) = x^2 - 4$

↙ Funktionsgleichung      ↘ Funktionsterm

$x$	0	+0,5	+1	+2
$y = f(x)$	-4	-3,75	-3	0

Definitionsmenge:  $D_f = \mathbb{R}$   
 Wertemenge:  $W_f = [-4; +\infty[$   
 Nullstellen:  $x_{1/2} = \pm 2$ ,  
 da  $f(\pm 2) = 0$  ist.



Funktionsgraph

Funktionen (I)

Fachbegriffe

delta8  
Seite 30 ff

$f: f(x) = mx + t$        $m, t \in \mathbb{R} ; D_f = \mathbb{R}$

Der Graph  $G_f$  einer linearen Funktion ist eine Gerade  $g$ , die die **y-Achse im Punkt  $T(0 | t)$**  schneidet.

Man nennt  $t$  den **y-Achsenabschnitt** der Geraden  $g$ ;  $m$  ist die **Steigung** der Geraden  $g$ .

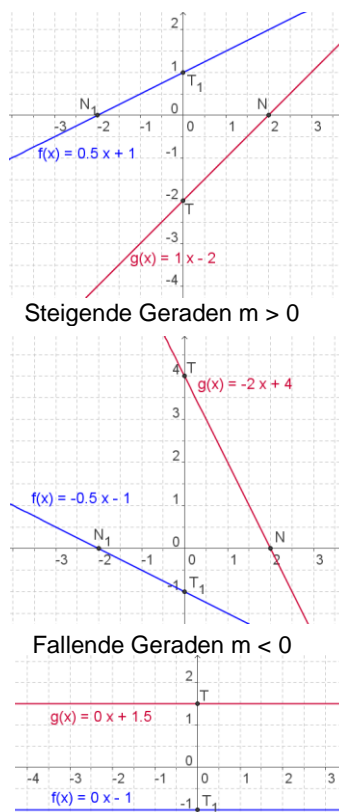
Für die **Nullstelle**  $x_N$  von  $f$  gilt  $f(x_N) = 0$ .

Man spricht auch von der Gleichung der Geraden  $g$  und schreibt  $g: y = mx + t$ .

Verläuft die Gerade durch die Punkte  $P(x_p | y_p)$  und  $Q(x_q | y_q)$ ,  $x_q \neq x_p$ , so gilt für die Geradensteigung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Zur x-Achse parallele Geraden  $m = 0$



Funktionen (II)

Lineare Funktionen

delta8  
Seite 47 ff

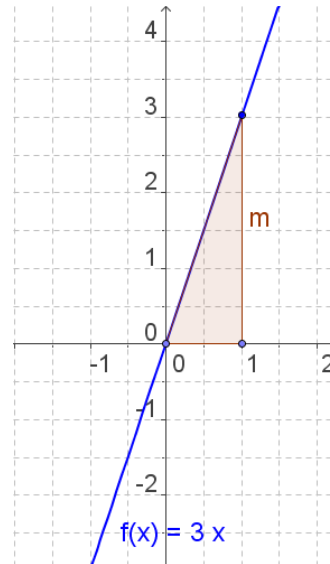
Wird dem Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen, .... dem k-Fachen ( $k \in \mathbb{R}$ ) einer Größe x das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, ... das k-Fache einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **proportionale Größen**.

Bei dieser Zuordnung gilt  $\frac{y}{x} = m$   
 mit **festem** m ( $m, x, y \neq 0$ );  
 sie kann also durch die Funktionsgleichung  $y = mx$  beschrieben werden.

Die Funktion  $f: f(x) = mx$  ;  $m \in \mathbb{R}$  ,  $\text{ID}_f = \mathbb{R}$   
 heißt **proportionale Funktion**.

Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine **Gerade durch den Ursprung** des Koordinatensystems;  
 dabei ist m die **Steigung** dieser Geraden.

Das rechtwinklige Dreieck mit waagrechter Kathete der Länge 1 LE und senkrechter Kathete der Länge m LE heißt **Steigungsdreieck**.



Funktionen (III)

Funktionen der direkten Proportionalität

delta8  
Seite 48 ff

Zwei Größen x und y heißen zueinander **indirekt proportional**, wenn gilt:  
 Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht ... , halbiert, drittelt ... man den Wert der einen Größe x, so halbiert, drittelt, viertelt ... , verdoppelt, verdreifacht ... sich der Wert der anderen Größe y.

Dem k-Fachen von x entspricht der k-te Teil von y und umgekehrt ( $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

Das Produkt xy von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen hat stets den gleichen Wert:

$$x \cdot y = a \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\text{d. h. } y = \frac{a}{x} .$$

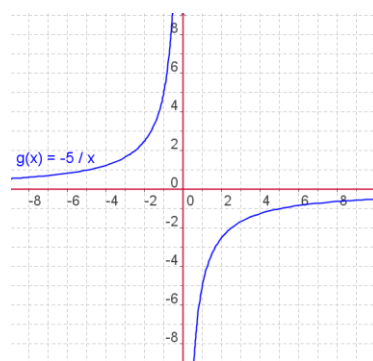
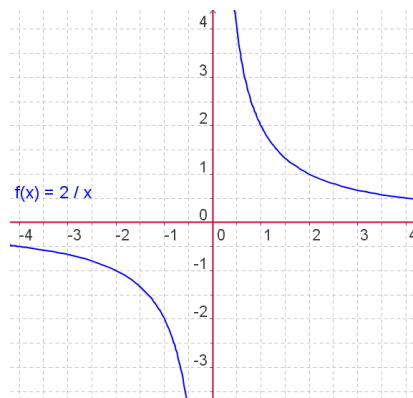
Jede Funktion  $f: f(x) = \frac{a}{x}$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ; \quad \text{ID}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

beschreibt die indirekte Proportionalität der beiden von null verschiedenen Variablen x und y.

Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Hyperbel**.

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote**,  
 die y-Achse eine **senkrechte Asymptote**  
 des Funktionsgraphen.



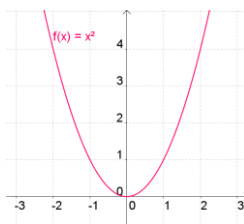
Funktionen (IV)

Funktionen der indirekten Proportionalität

delta8  
Seite 112 ff

**Normalparabel** nennt man den Graphen der quadratischen Funktion  $f(x) = x^2$ .

$ID_f = \mathbb{R}$                        $W_f = \mathbb{R}_0^+$   
 Nullstelle                       $N(0 | 0)$   
 Tiefster Punkt:                **Scheitel**  $S(0 | 0)$



**Verschiebung der Normalparabel...**

**... in y-Richtung**

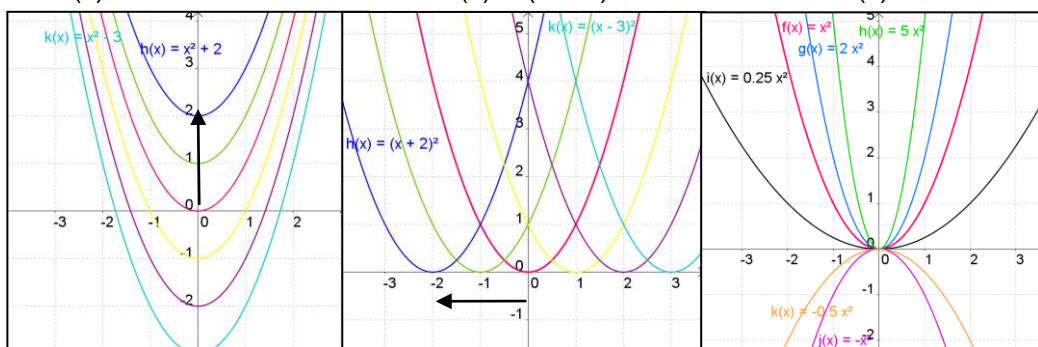
$f(x) = x^2 + a$

**... in x-Richtung**

$f(x) = (x + a)^2$

**Streckung / Spiegelung**

$f(x) = ax^2$



Der Graph der **quadratischen Funktion**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  heißt **Parabel**.

Dabei gilt:  $ID_f = \mathbb{R}$  ;  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  $b, c \in \mathbb{R}$

Der Graph hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse  $s_y(0 | c)$ .

Es gibt zwei, einen oder keinen Schnittpunkt(e) mit der x-Achse (**Nullstellen**).

Der tiefste / höchste Punkt der Parabel heißt **Scheitel**(punkt).

Der Graph ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel.

Der Graph der Parabel zur Funktionsgleichung  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ist für ...

$a < -1$	...nach unten geöffnet	...enger als die Normalparabel
$a = -1$	...nach unten geöffnet	... kongruent zur Normalparabel
$-1 < a < 0$	...nach unten geöffnet	...weiter als die Normalparabel
$0 < a < 1$	...nach oben geöffnet	...weiter als die Normalparabel
$a = 1$	...nach oben geöffnet	... kongruent zur Normalparabel
$a > 1$	...nach oben geöffnet	...enger als die Normalparabel

Durch **quadratische Ergänzung** kann man jeden Funktionsterm einer Parabel auf die **Scheitelform**  $f(x) = a(x - d)^2 + e$  bringen. Der Scheitel ist dann  $S(d | e)$ .

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0,5x^2 - 0,5x - 1 \\
 &= 0,5 [ x^2 - x + (0,5)^2 - (0,5)^2 ] - 1 \\
 &= 0,5 [ (x - 0,5)^2 - 0,25 ] - 1 \\
 &= 0,5(x - 0,5)^2 - 0,125 - 1 \\
 &= 0,5(x - 0,5)^2 - 1,125
 \end{aligned}$$

Quadratisch ergänzen

Ausklammern

Binomische Formel

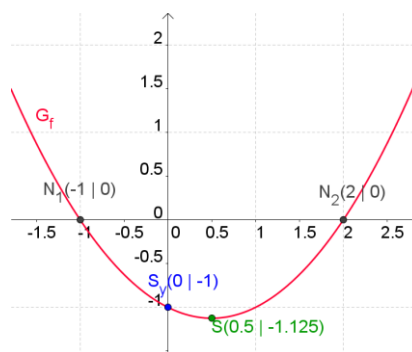
Somit:  $G_f$  ist weiter als die Normalparabel und nach oben offen ( $a=0,5$ )!

Scheitel  $S(0,5 | -1,125)$                        $S_y(0 | -1)$

$ID_f = \mathbb{R}$  und  $W_f = [-1 ; \infty[$

Nullstellen:  $0,5x^2 - 0,5x - 1 = 0$

Mit Lösungsformel:  $N_1(-1 | 0)$  und  $N_2(2 | 0)$



Funktionen (VI)

Ist der Funktionsterm ein Bruchterm, bei dem die Variable mindestens im Nenner vorkommt, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion**.

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Variablen, für die der Nenner nicht gleich null wird.

**Definitionslücken:** Nullstellen des Nennerterms

*Beispiel:*

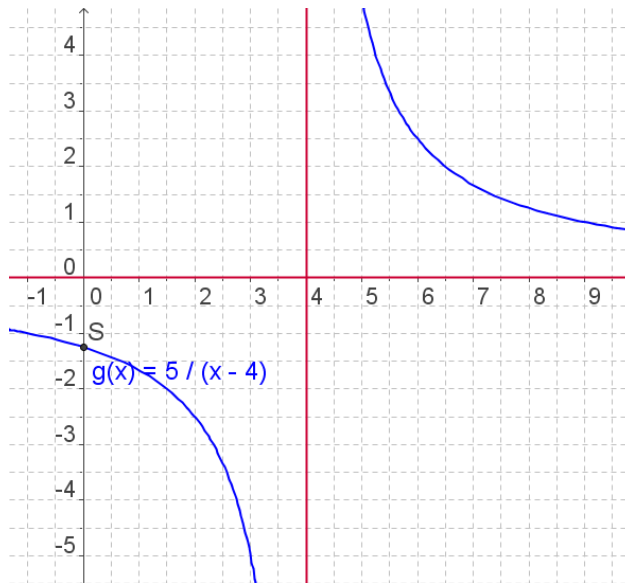
$$g(x) = \frac{5}{x-4} \quad \text{ID}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Die Funktion g hat die Definitionslücke 4.

g hat keine Nullstelle.

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -1,25).

**Waagrechte Asymptote:**  $y = 0$   
**Senkrechte Asymptote:**  $x = 4$



Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	-1	-1,25	-1,67	-2,5	-5	-	5	2,5

*Beispiel:*

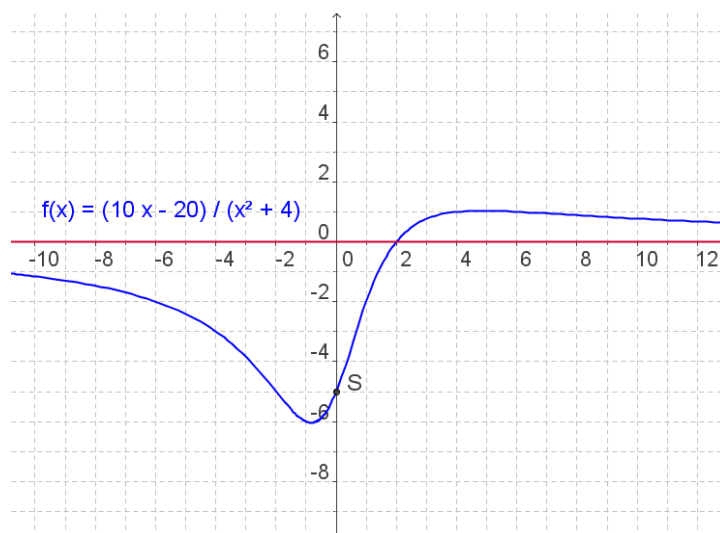
$$f(x) = \frac{10x - 20}{x^2 + 4} \quad \text{ID}_f = \mathbb{R}$$

Die Funktion f hat keine Definitionslücke.

f hat die Nullstelle N(2 | 0).

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -5).

**Waagrechte Asymptote:**  
 $y = 0$   
**Senkrechte Asymptote:**  
 Keine



x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	-2	-3	-5	-5	0	1	1	0,88

Gebrochen-  
rationale  
Funktionen

Allgemein: Eine **gebrochenrationale Funktion** hat einen Funktionsterm der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}. \text{ Die } \textbf{Definitionsl\u00fccken} \text{ sind die Nullstellen von } q(x).$$

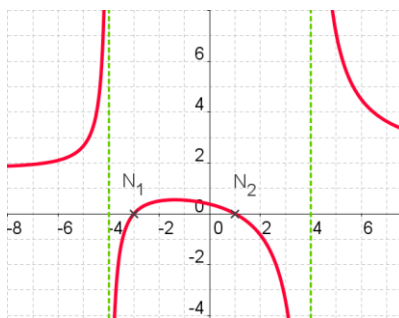
Die Definitionsl\u00fccken und die Nullstellen einer Funktion lassen sich nach dem **Faktorisieren** sofort erkennen.

**Beispiel:**

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x^2 - 16} = \frac{2(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+4)}$$

Nullstellen:  $x_1 = -3$  und  $x_2 = 1$

Definitionsl\u00fccken:  $x_3 = 4$  und  $x_4 = -4$



Gilt an einer Definitionsl\u00fccke  $x_0$  einer gebrochen rationalen Funktion

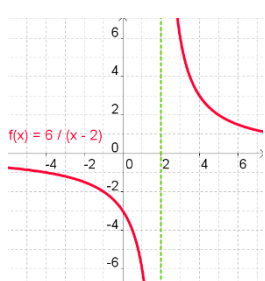
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \text{ oder } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ ,

so liegt bei  $x_0$  eine so genannte **Polstelle** von  $f$  vor.

Die Gerade mit der Gleichung  $x=x_0$  hei\u00dft **senkrechte Asymptote** des Graphen.

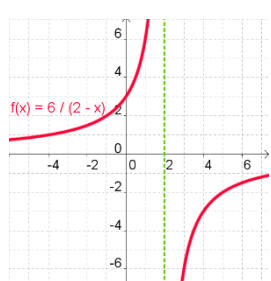
Hier die vier Arten von Polstellen: (Im Beispiel mit senkrechter Asymptote  $x = 2$ )



...mit Vorzeichenwechsel (- nach +)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

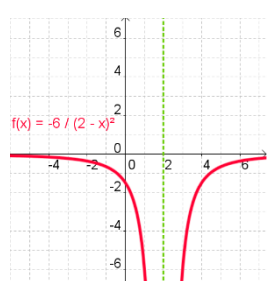
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



...mit Vorzeichenwechsel (+ nach -)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

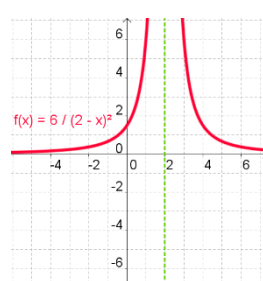
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$



...ohne Vorzeichenwechsel (- / -)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$



...ohne Vorzeichenwechsel (+ / +)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

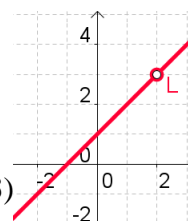
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Gilt an einer Definitionsl\u00fccke  $x_0$  einer gebrochen rationalen Funktion

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ) so hei\u00dft  $x_0$  (**be-)hebbare** Definitionsl\u00fccke.

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = x+1$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  ; L\u00fccke bei (2|3)



**Funktionen (VI)**

(Fortsetzung)

**Gebrochenrationale Funktionen**

Lambacher Schweizer 11  
Seite 8

Lambacher Schweizer 11  
Seite 9

Lambacher Schweizer 11  
Seite 10

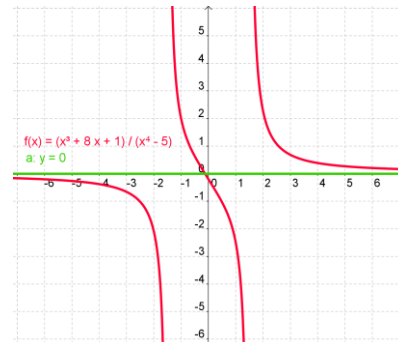
Weitere Arten von Asymptoten erhält man für  $|x| \rightarrow \infty$ :

Allgemein: Es sei  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , z sei der Grad von p, n der Grad von q.

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{6x^5 + 3x^3 + 7}{x^2 + 8x - 1}$  Zählergrad z = 5, Nennergrad n = 2

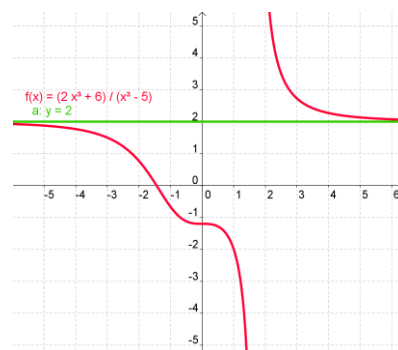
**1. Fall:**  $z < n$   
Der Graph hat die x-Achse als **waagrechte Asymptote**.

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{x^3 + 8x + 1}{x^4 - 5}$   
z = 3, n = 4 Waagr. A.: **y = 0**



**2. Fall:**  $z = n$   
Der Graph hat eine **waagrechte Asymptote** (nicht die x-Achse).

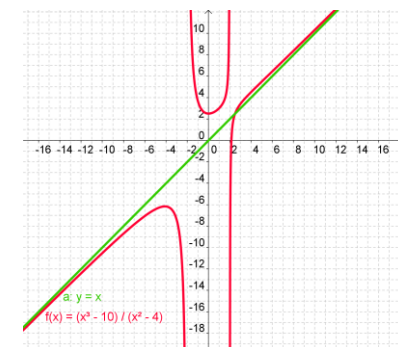
**Beispiel:**  $f(x) = \frac{2x^3 + 6}{x^3 - 5}$   
z = 3, n = 3 Waagr. A.: **y = 2**



Polynomdivision ergibt:  $f(x) = \frac{2x^3 + 6}{x^3 - 5} = 2 + \frac{16}{x^3 - 5}$

**3. Fall:**  $z = n + 1$   
Der Graph hat eine **schräge Asymptote**.

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{x^3 - 10}{x^2 - 4}$   
z = 3, n = 2 Schiefe A.: **y = x**

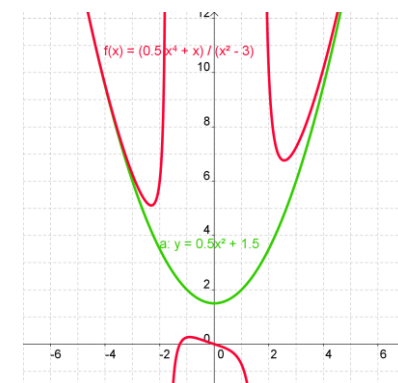


Polynomdivision ergibt:  $f(x) = \frac{x^3 - 10}{x^2 - 4} = x + \frac{4x - 10}{x^2 - 4}$

**4. Fall:**  $z > n + 1$   
Der Graph hat keine Asymptote (er besitzt eine „**asymptotische Kurve**“).

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{0,5x^4 + x}{x^2 - 3}$   
z = 4, n = 2 **y = 0,5x^2 + 1,5**

Polynomdivision ergibt:  $f(x) = 0,5x^2 + 1,5 + \frac{x + 4,5}{x^2 - 3}$



Funktionen (VI)

(Fortsetzung)

Gebrochenrationale Funktionen

**Potenzfunktion (n-ten Grades)**

nennt man Funktionen der Art  $f(x) = ax^n$ ,  
ihren Graphen nennt man **Parabel**  
(n-ter Ordnung; für  $n > 1$ ).

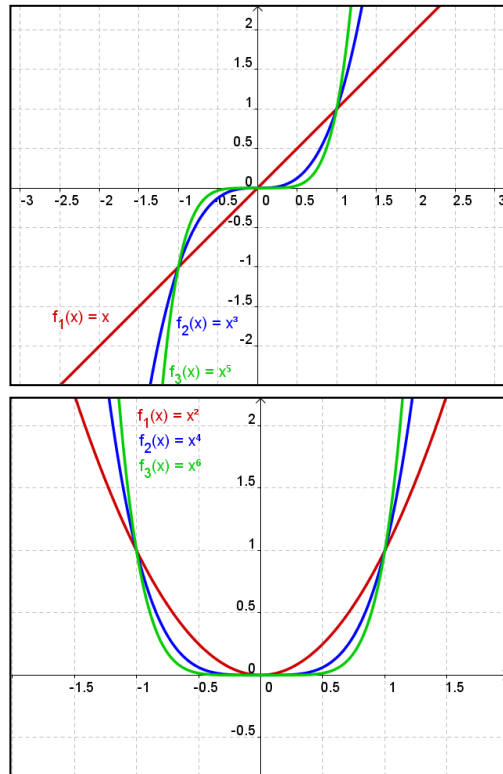
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$

Bilder:  $a = 1$

**Oben:** Exponent n ungerade  
 $D_f = \mathbb{R}$   $W_f = \mathbb{R}$   
 Punktsymmetrie zum Ursprung  
 Punkte  $(-1|-1)$ ,  $(0|0)$ ,  $(1|1)$

**Unten:** Exponent n gerade  
 $D_f = \mathbb{R}$   $W_f = \mathbb{R}_0^+$   
 Achsensymmetrie zur y-Achse  
 Punkte  $(-1|1)$ ,  $(0|0)$ ,  $(1|1)$

Je größer der Exponent n wird, desto  
„flacher“ verläuft der Graph im Ursprung.



**Funktionen (VII)**

**Potenz-  
funktionen**

delta10  
Seite 122 f

Funktionen der Form  $f : x \rightarrow a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \sqrt[q]{x^p}$

( $a \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ ) heißen

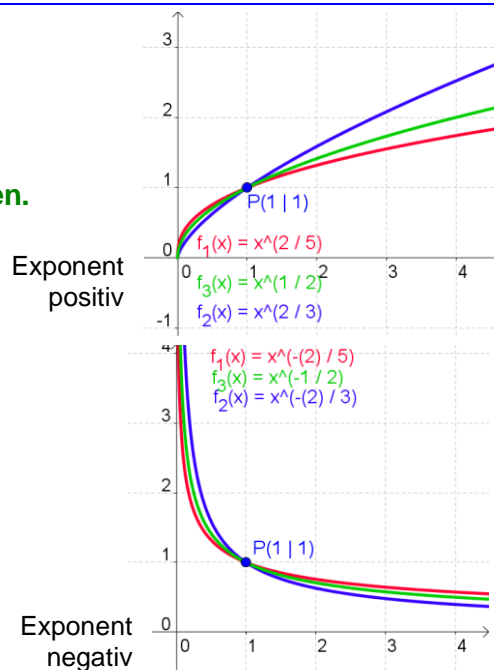
**Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.**

Insbesondere heißt  $f : x \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

**(Quadrat-) Wurzelfunktion.**

Die Funktion  $f : x \rightarrow a \cdot x^{\frac{p}{q}}$  besitzt die

Umkehrfunktion  $f^{-1} : x \rightarrow \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{q}{p}}$ .



**Funktionen (VIII)**

**Potenz-  
funktionen mit  
rationalen  
Exponenten**

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 139 ff



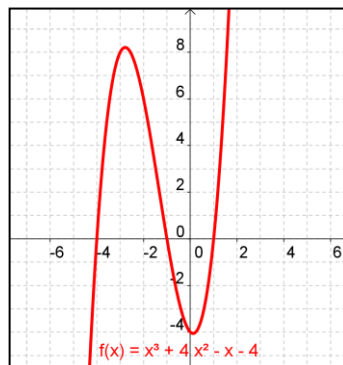
Eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$   $a_n \neq 0$  nennt man **ganzzrationale Funktion (Polynomfunktion) n-ten Grades**.  $D_f = \mathbb{R}$

Die reellen Zahlen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  heißen **Koeffizienten** des **Polynoms  $f(x)$** .

**Beispiel:**  $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$   $S_y(0 | -4)$

Nullstellensuche:  $f(x) = 0$  für  $x_1 = 1$  (**Raten!**)

Weitere Nullstellen: **Polynomdivision** mit  $(x - 1)$ , dann Lösungsformel mit dem Restpolynom:



$$\begin{array}{r} (x^3 + 4x^2 - x - 4) : (x - 1) = x^2 + 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{- 4} \\ 5x^2 - x \phantom{- 4} \\ \underline{-(5x^2 - 5x)} \phantom{- 4} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

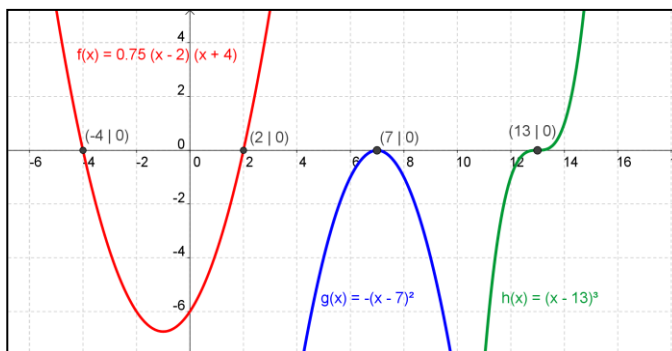
$$x_2 = -4 \text{ und } x_3 = -1$$

$$N_1(1 | 0), N_2(-4 | 0), N_3(-1 | 0)$$

**Weitere Beispiele:**

$$f(x) = 0,75 \cdot (x-2) \cdot (x-4)$$

Die Funktion zweiten Grades hat die beiden (**einfachen**) Nullstellen  $x_1 = -4$  und  $x_2 = 2$ , der Graph schneidet dort jeweils die x-Achse,  $f(x)$  wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen.



$$g(x) = -(x-7)^2$$

Grad 2

Eine (**doppelte**) Nullstelle  $x_{1/2} = 7$ , der Graph berührt dort die x-Achse, es findet kein Vorzeichenwechsel statt!

$$h(x) = (x-13)^3$$

Grad 3

Eine (**dreifache**) Nullstelle  $x_{1/2/3} = 13$ , der Graph schneidet die x-Achse, es findet ein Vorzeichenwechsel (von - nach +) statt!

**Allgemein:** Bei einer k-fachen Nullstelle...  
 ... findet ein **Vorzeichenwechsel** statt (**Schnitt**), wenn **k ungerade** ist!  
 ... findet **kein Vorzeichenwechsel** statt (**Berührung**), wenn **k gerade** ist!

Das **Verhalten** einer Polynomfunktion für **betragsgroße Werte von x** ist der Summand  $a_n x^n$  verantwortlich:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4 \quad \text{Für } x \mapsto \infty \text{ gilt } f(x) \mapsto \infty \text{ und für } x \mapsto -\infty \text{ gilt } f(x) \mapsto -\infty.$$

$$g(x) = -3x^4 + 2x - 15 \quad \text{Für } x \mapsto \infty \text{ gilt } g(x) \mapsto -\infty \text{ und für } x \mapsto -\infty \text{ gilt } g(x) \mapsto -\infty.$$

Funktionen (IX)

Ganzzrationale Funktionen

Nullstellen

Verhalten im Unendlichen

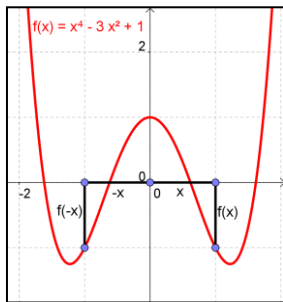
Funktionen (IX)

(Fortsetzung)

Ganzrationale Funktionen

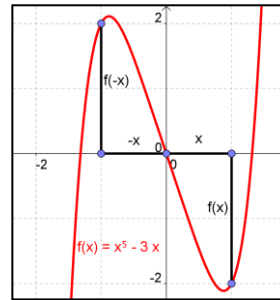
Symmetrie

delta10  
Seite 118 ff



Eine Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt  $f(-x) = f(x)$   
(für alle  $x \in D_f$ )  
(Bei Polynomfunktionen: nur **gerade** Exponenten)

Eine Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn gilt  $f(-x) = -f(x)$ .  
(für alle  $x \in D_f$ )  
(Bei Polynomfunktionen: nur **ungerade** Exponenten)



Sinusfunktion:

$y = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$       $W_f = [-1 ; +1]$

Periodenlänge  $2\pi$

**Nullstellen** bei  $x_k = k \cdot \pi$   
( $k \in \mathbb{Z}$ )



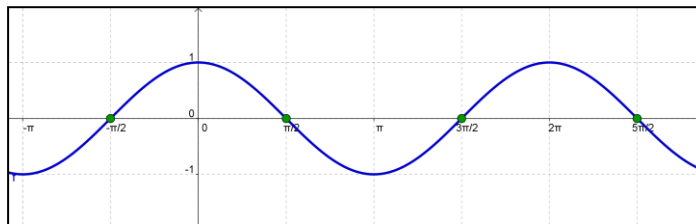
Kosinusfunktion:

$y = \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$       $W_f = [-1 ; +1]$

Periodenlänge  $2\pi$

**Nullstellen** bei  $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )     x-Achse: Winkel im **Bogenmaß** !



Die **allgemeine Sinus-/Kosinusfunktion**:

$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$      bzw.      $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x + c)] + d$

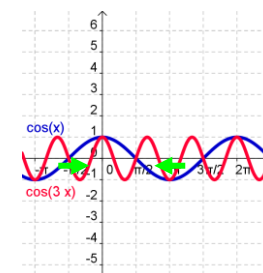
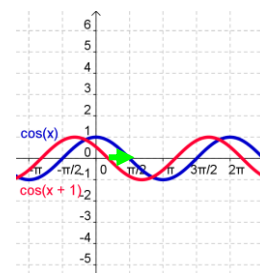
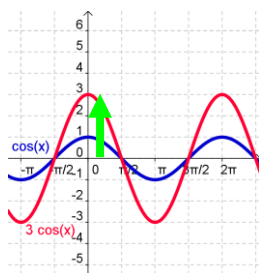
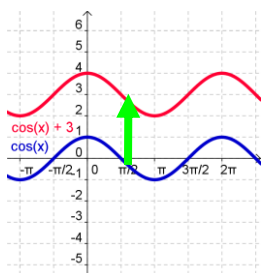
Die Periodenlänge ist nun  $\frac{2\pi}{|b|}$ .      $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$

$y = \cos x + d$   
**Verschiebung** um  $d$  in y-Richtung

$y = a \cdot \cos x$   
**Streckung** um  $|a|$  in y-Richtung

$y = \cos(x+c)$   
**Verschiebung** um  $-c$  in x-Richtung

$y = \cos(b \cdot x)$   
**Streckung** um  $1/|b|$  in x-Richtung



Analog: Die allgemeine Sinusfunktion.

Funktionen (X)

Sinusfunktion, Kosinusfunktion

delta10  
Seite 40 ff

Eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = a^x$  nennt man **Exponentialfunktion**.

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$      $D_f = \mathbb{R}$      $W_f = \mathbb{R}^+$

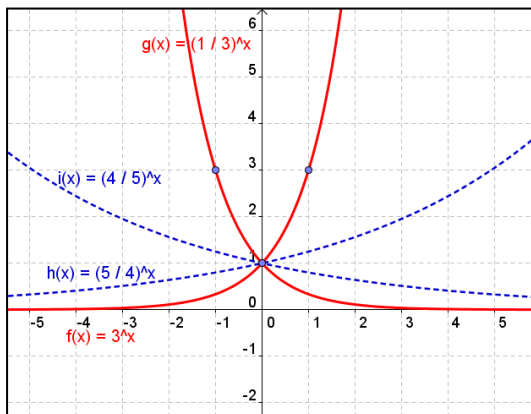
Es gilt:  $S_y(0|1)$

Für  $a > 1$  werden die Funktionswerte für  $x \rightarrow \infty$  immer größer.

Für  $0 < a < 1$  werden die Funktionswerte für  $x \rightarrow \infty$  immer kleiner.

Die Graphen haben keine Nullstellen, die  $x$ -Achse ist eine waagrechte Asymptote.

Die Graphen von  $f(x) = a^x$  und  $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  sind zueinander achsensymmetrisch.



Funktionen (XI)

Exponentialfunktionen

delta10  
Seite 66 ff

Bei der **natürlichen Exponentialfunktion**  $f : x \rightarrow e^x$  ist die **Euler'sche Zahl  $e = 2,71828...$**  die Basis.

Es gilt:

$f'(x) = e^x$  und  $F(x) = e^x$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .

Die **natürliche Logarithmusfunktion**  $f : x \rightarrow \ln x$

(für  $x \in \mathbb{R}^+$ ) ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

Die Euler'sche Zahl  $e$  ist die Basis des natürlichen Logarithmus:  $\ln x = \log_e x$

Es gilt:  $f'(x) = \frac{1}{x}$  und

$F(x) = \ln |x|$  ist Stammfunktion von  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

$f : x \rightarrow a^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist darstellbar als Exponentialfunktion mit der Basis  $e$ :  $f(x) = e^{x \cdot \ln a}$

$g : x \rightarrow \log_a x$  kann man mithilfe der natürlichen

Logarithmusfunktion schreiben:  $g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

**Wichtige Grenzwerte:**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

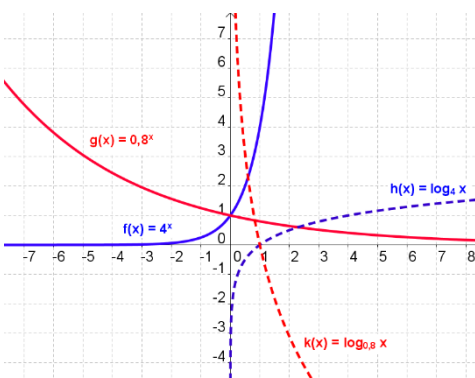
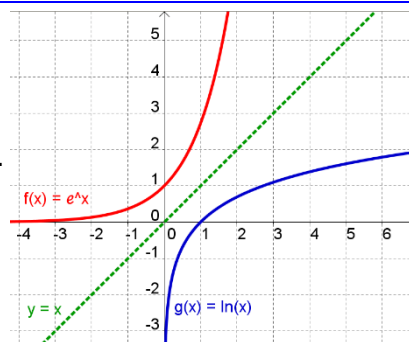
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Für  $r > 0$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^r) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^r \cdot \ln x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$



Funktionen (XII)

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktionen

Wichtige Grenzwerte

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 152 ff

Funktionen (XIII)

Eine Funktion  $f: x \mapsto f(x)$  mit der Definitionsmenge  $D_f$  und der Wertemenge  $W_f$  heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem  $y \in W_f$  genau ein  $x \in D_f$  mit  $f(x) = y$  gibt. Ist eine Funktion  $f$  umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung eine Funktion. Diese heißt **Umkehrfunktion** von  $f$  und wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

Kriterium für die Umkehrbarkeit:

Ist eine Funktion  $f$  streng monoton, so ist sie umkehrbar. Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion  $f$ , für die  $f'(x) > 0$  für alle  $x$  in einem Intervall (bzw.  $f'(x) < 0$  für alle  $x$  in einem Intervall), in diesem Intervall umkehrbar.

Die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind zueinander symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Es gilt:  $D_{f^{-1}} = W_f$  und  $W_{f^{-1}} = D_f$

Wie bestimmt man den Funktionsterm  $f^{-1}(x)$ ?

1. Auflösen der Funktionsgleichung  $y = f(x)$  nach  $x$
2. Variablentausch  $x \leftrightarrow y$ , wobei nun  $y = f^{-1}(x)$

Beispiel:

$f(x) = (x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$   
 ist in  $D_f = ]3; \infty[$  umkehrbar, denn  
 $f'(x) = 2x - 6 > 0$  für  $x > 3$   
 ( $f$  ist streng monoton steigend)

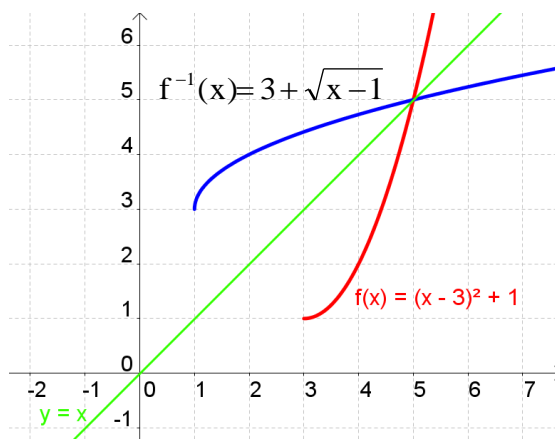
$$y = (x - 3)^2 + 1$$

$$y - 1 = (x - 3)^2$$

$$\sqrt{y - 1} = x - 3$$

$$3 + \sqrt{y - 1} = x$$

$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$  ;  $D_{f^{-1}} = W_f = ]1; \infty[$



Umkehrbarkeit, Umkehrfunktion

Lambacher Schweizer 11 Seite 130 ff

Funktionen (XIV)

Für zwei Funktionen  $v: x \mapsto v(x)$  und  $u: x \mapsto u(x)$  heißt die Funktion  $u \circ v: x \mapsto u(v(x))$  **Verkettung** oder **Hintereinanderausführung** der Funktionen  $u$  und  $v$ .

$v$  heißt **innere** und  $u$  **äußere Funktion**.

Es gilt im Allgemeinen:  $u \circ v \neq v \circ u$ .

Umgekehrt lässt sich oft eine komplizierte Funktion  $f$  als Verkettung von einfacheren Funktionen  $u$  und  $v$  darstellen mit  $f = u \circ v$  (Zerlegung einer Verkettung).

$f(x) = u(v(x)) = 5(3x^2 - 7)^4$

$v(x) = 3x^2 - 7$   
 innere Funktion  
 $u(x) = 5x^4$   
 äußere Funktion

Umgekehrt:

$g(x) = v(u(x)) = 3(5x^4)^2 - 7 = \dots$

Verkettung von Funktionen

Lambacher Schweizer 11 Seite 133 ff

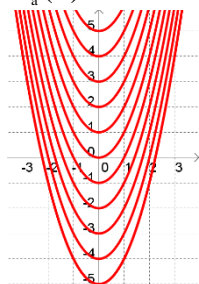
Funktionen (XV)

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen  $x$  noch eine weitere (von  $x$  unabhängige) Variable  $a$ , so gehört zu jedem möglichen Wert von  $a$  eine Funktion  $f_a : x \rightarrow f_a(x)$ .

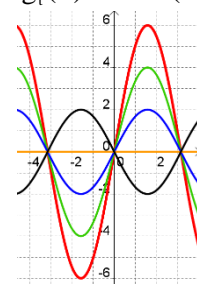
Die Variable  $a$  nennt man **Parameter**.

Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**.

$f_a(x) = x^2 + a$



$g_t(x) = t \cdot \sin(x)$



Funktionen mit Parametern

Lambacher Schweizer 11 Seite 208 ff

Um eine Funktion  $f$  zu bestimmen, die vorgegebene Eigenschaften hat, z.B.

- Punkte auf dem Graphen,
- Extremstellen oder die Steigung des Graphen an einer Stelle,
- Nullstellen oder Polstellen,

sind diese Eigenschaften (Bedingungen) mithilfe von  $f$  oder  $f'$  als Gleichungen zu formulieren und das Gleichungssystem zu lösen.

Die nötige Anzahl von Gleichungen wird durch die Zahl der Parameter im Funktionsterm bestimmt.

Die Berücksichtigung von besonderen Eigenschaften, wie z. B.

- Symmetrie des Graphen,
- Existenz einer waagrechten Asymptote,

kann gegebenenfalls den Ansatz für den Funktionsterm vereinfachen, insbesondere, wenn in realen Situationen das Koordinatensystem geeignet gewählt wird.

**Beispiel:** Gesucht: Ganzrationale Funktion dritten Grades  
mit **TIP(0|5)** durch **(-1|7)** und der **Steigung 8** an der Stelle  $x = -2$

Ansatz:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 5 \rightarrow d = 5$

$f'(-2) = 8 \rightarrow c = 0$

$f(-1) = 7 \rightarrow -a + b + 5 = 7$

bzw.  $-a + b = 2$

$f'(-2) = 8 \rightarrow$

$12a - 4b = 8$

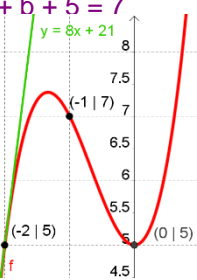
...

$a = 2$

$b = 4$

Also:

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5$



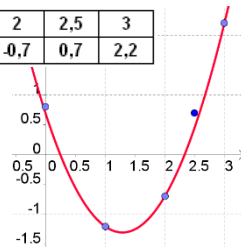
Funktionen (XVI)

Vorgehen bei einer Funktionsbestimmung

Lambacher Schweizer 11 Seite 212 ff

- 1) Daten in ein Koordinatensystem eintragen.
- 2) Mithilfe von Parametern Gleichung einer Funktion aufstellen, deren Graph näherungsweise durch die gegebenen Punkte gehen soll.
- 3) Je nach Zahl der Parameter die Koordinaten einer entsprechenden Zahl von Punkten in die Funktionsgleichung einsetzen und das entstandene Gleichungssystem lösen.
- 4) Mithilfe der Koordinaten weiterer Punkte die Brauchbarkeit der gefundenen Funktion überprüfen.

x	0	1	2	2,5	3
y	0,8	-1,2	-0,7	0,7	2,2



Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = -1,2 \rightarrow a + b + c = -1,2$

$f(2) = -0,7 \rightarrow 4a + 2b + c = -0,7$

$f(3) = 2,2 \rightarrow 9a + 3b + c = 2,2$

...

$\rightarrow f(x) = 1,2x^2 - 3,1x + 0,7$

Funktionen (XVII)

Vorgehen bei einer Funktionsanpassung

Lambacher Schweizer 11 Seite 215 ff

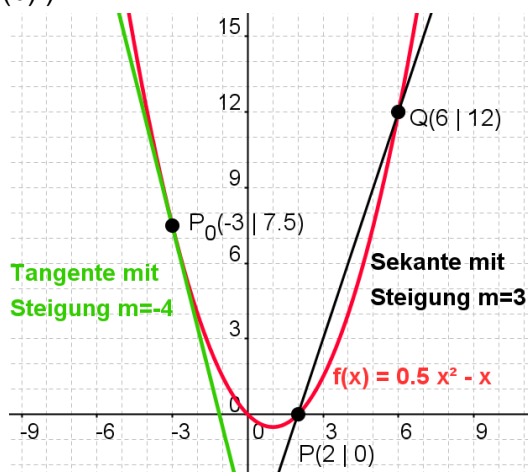
Ist die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a;b]$  definiert, so heißt  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate** von  $f$  im Intervall  $[a ; b]$ .

Anschaulich entspricht  $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  der Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte  $P(a | f(a))$  und  $Q(b | f(b))$ .

**Beispiel:**

$f(x) = 0,5x^2 - x$   
 Mittlere Änderungsrate  
 im Intervall  $[2; 6]$ : (Punkte P und Q)

$$m = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{12 - 0}{6 - 2} = \frac{12 - 0}{4} = \underline{\underline{3}}$$



Wenn für eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  der Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  der mittleren Änderungsrate existiert, dann heißt er

**Differentialquotient** oder **lokale (momentane) Änderungsrate**

von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird meist mit  $m_{x_0}$  bezeichnet.

Die Gerade durch den Punkt  $P_0(x_0 | f(x_0))$  mit der Steigung  $m_{x_0}$  heißt

**Tangente an den Graphen in  $P_0$** . Die Tangentensteigung  $m_{x_0}$  wird als **Steigung des Graphen** im Punkt  $P_0(x_0 | f(x_0))$  bezeichnet.

**Im Beispiel:**  $f(x) = 0,5x^2 - x$  (Bild siehe oben)  
 Lokale Änderungsrate an der Stelle  $x_0 = -3$ :  $P_0(-3 | 7,5)$

$$m_{-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{0,5x^2 - x - 7,5}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{0,5(x^2 - 2x - 15)}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{0,5(x + 3)(x - 5)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} 0,5(x - 5) = 0,5(-3 - 5) = \underline{\underline{-4}}$$

Oder:  
 „Tangentensteigung im Punkt  $P_0$ :  $m = -4$ “  
 „Der Graph  $G_f$  hat im Punkt  $P_0$  die Steigung  $m = -4$ “

Differentialrechnung (I)

Differenzenquotient

( Mittlere Änderungsrate )

Lambacher Schweizer 11 Seite 28 ff

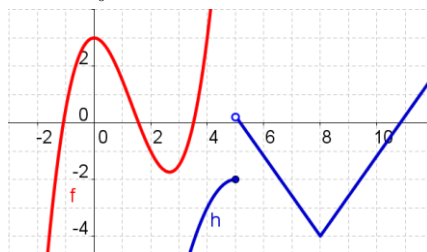
Differentialquotient

Lambacher Schweizer 11 Seite 31 ff

Wenn eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  den Differentialquotienten bzw. die lokale (momentane) Änderungsrate  $m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  besitzt, so heißt  $f$  an der Stelle  $x_0$  **differenzierbar**.

Man nennt den Grenzwert  $m_{x_0}$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und schreibt dafür  $f'(x_0)$ . Die Ableitung  $f'(x_0)$  ist also gleich der lokalen (momentanen) Änderungsrate  $m_{x_0}$ .

Ist eine Funktion  $f$  für alle Werte  $x_0$  aus einem Intervall  $I$  differenzierbar, so nennt man  $f$  eine **auf  $I$  differenzierbare Funktion**.



Die Funktion  $f$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar. Die Funktion  $h$  ist für  $x_1 = 5$  und  $x_2 = 8$  nicht differenzierbar.

Differentialrechnung (II)

Differenzierbarkeit

Lambacher Schweizer 11 Seite 36 ff

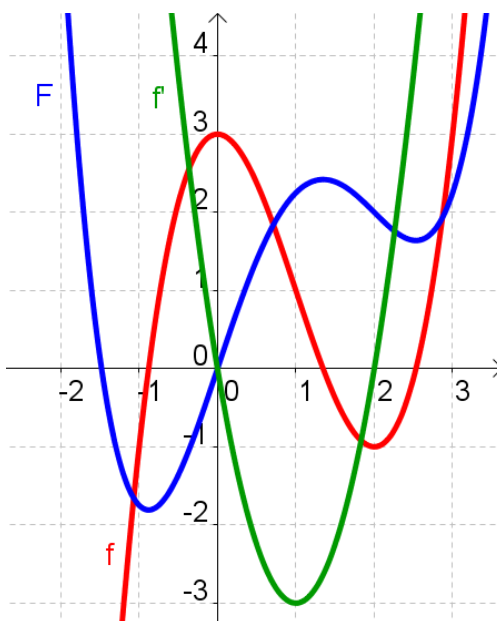
Zu einer Funktion  $f$  heißt die Funktion  $f: x \mapsto f'(x)$  die **Ableitungsfunktion** oder kurz die **Ableitung von  $f$** .

Eine Funktion  $F$  heißt eine **Stammfunktion** der Funktion  $f$ , wenn im gemeinsamen Definitionsbereich gilt:  $F'(x) = f(x)$

Jede ganzrationale Funktion  $f$  vom Grad  $n$  ist differenzierbar und ihre Ableitung ist eine ganzrationale Funktion vom Grad  $n - 1$ .

Beispiel:

Funktion:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$   
 Ableitung:  $f'(x) = 3x^2 - 6x$   
 Stammfunktion:  $F(x) = 0.25x^4 - x^3 + 3x$



Differentialrechnung (III)

Ableitungsfunktion,

Stammfunktion

Lambacher Schweizer 11 Seite 40 ff

Potenzfunktionen:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$(n \in \mathbb{Z})$
Summenregel:	$f(x) = g(x) + h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	
Faktorregel:	$f(x) = c \cdot g(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	$(c \in \mathbb{R})$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$	
Beispiele:	$f(x) = x^5 + x^2 - 7x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 5x^4 + 2x^1 - 7 = 5x^4 + 2x - 7$	
	$f(x) = 5x^6 \cdot 2x^3 = 10x^9$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 30x^5 \cdot 2x^3 + 5x^6 \cdot 6x^2 = 60x^8 + 30x^8 = 90x^8$	
	$f(x) = \frac{10x^4}{5x^2} = 2x^2$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{40x^3 \cdot 5x^2 - 10x^4 \cdot 10x}{[5x^2]^2} = \frac{200x^5 - 100x^5}{25x^4} = \frac{100x^5}{25x^4} = 4x$	

Differentialrechnung (IV)

Ableitungsregeln

Lambacher Schweizer 11 Seite 47 ff

Einen Funktion  $f$  heißt **streng monoton zunehmend** in einem Intervall  $J$  des Definitionsbereichs, wenn für alle  $x_1, x_2$  aus  $J$  mit  $x_1 < x_2$  gilt:  $f(x_1) < f(x_2)$

Einen Funktion  $f$  heißt **streng monoton abnehmend** in einem Intervall  $J$  des Definitionsbereichs, wenn für alle  $x_1, x_2$  aus  $J$  mit  $x_1 < x_2$  gilt:  $f(x_1) > f(x_2)$

Gilt:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , so heißt  $f$  **monoton zunehmend** in  $J$ ,  
 $f(x_1) \geq f(x_2)$ , so heißt  $f$  **monoton abnehmend** in  $J$ .

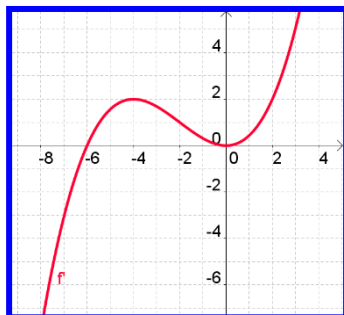
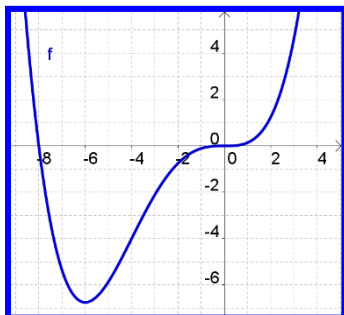
**Monotoniekriterium:** Die Funktion  $f$  sei im Intervall  $J$  differenzierbar.

Wenn für alle  $x \in J$  gilt

$f'(x) > 0$ , dann ist  $f$  streng monoton zunehmend in  $J$ ,

$f'(x) < 0$ , dann ist  $f$  streng monoton abnehmend in  $J$ .

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$ ,  $f'(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{16}(x+6)x^2$



$f$  ist  
 ...streng monoton abnehmend im Intervall  $]-\infty; -6]$   
 ...streng monoton zunehmend im Intervall  $]-6; +\infty]$   
 $f'(x) = 0$  für  $x_1 = -6$  und  $x_2 = 0$

Differentialrechnung (V)

Monotonie

Lambacher Schweizer 11 Seite 64 ff

Wenn es eine Umgebung  $U(x_0)$  gibt, so dass für alle Werte  $x \in U(x_0)$  aus dem Definitionsbereich gilt

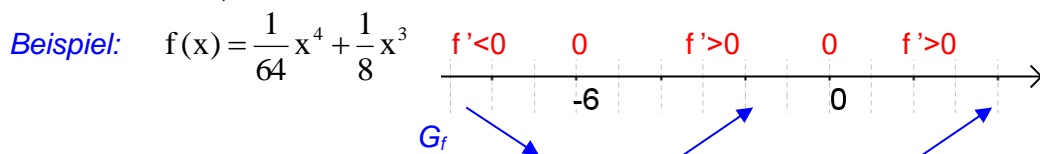
- $f(x) \leq f(x_0)$ , dann heißt der Funktionswert  $f(x_0)$  **lokales Maximum**,
- $f(x) \geq f(x_0)$ , dann heißt der Funktionswert  $f(x_0)$  **lokales Minimum** von  $f$ .

Ist der Funktionswert  $f(x_0)$  ein Maximum oder ein Minimum, nennt man ihn auch **Extremwert** und  $x_0$  eine **Extremstelle**. Der Punkt  $P(x_0|f(x_0))$  des zu  $f$  gehörenden Graphen heißt **Extrempunkt**. Im Falle des Maximums heißt  $P$  **Hochpunkt**, im Falle des Minimums heißt  $P$  **Tiefpunkt**.

Bedingung für Extremwerte: Die Funktion  $f$  sei auf einem Intervall  $J = ]a; b[$  differenzierbar und  $x_0$  eine innere Stelle von  $J$ , d.h.  $x_0 \in ]a; b[$ .

Wenn  $f'(x_0) = 0$  ist und  $f$  bei  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel von  $+$  nach  $-$  hat, dann hat die Funktion  $f$  ein lokales Maximum an der Stelle  $x_0$ .

Wenn  $f'(x_0) = 0$  ist und  $f$  bei  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel von  $-$  nach  $+$  hat, dann hat die Funktion  $f$  ein lokales Minimum an der Stelle  $x_0$ .



Also: Lokales (und globales) Minimum bei  $(-6|-6,75)$  und ein Terrassenpunkt bei  $(0|0)$

Differentialrechnung (VI)

Extremwerte

Lambacher Schweizer 11 Seite 68 ff



Man kann eine Funktion unter den folgenden Aspekten untersuchen:

- Definitionsmenge
- Symmetrie
- Schnittpunkte mit den Achsen (Nullstellen / y-Achsenabschnitt)
- Verhalten an den Definitionslücken
- Verhalten im Unendlichen
- Monotonie und Extremwerte
- Graph

Beispiel:

$$f(x) = 3 + \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

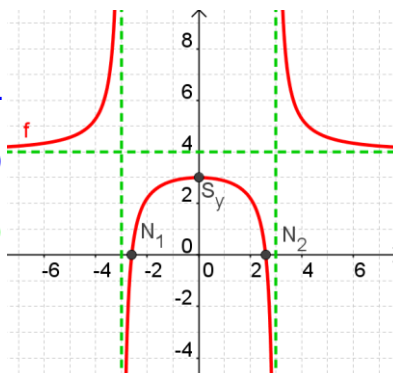
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; +3\}$$

Achsensym.

$$S_y(0|3) = \text{HOP}$$

$$N(\pm 2,6|0)$$

(Asymptoten)



Differentialrechnung (VII)

Funktionsuntersuchungen

Lambacher Schweizer 11 Seite 74 ff

Hat die differenzierbare Funktion  $f$  eine Nullstelle  $x_N$ , so kann diese näherungsweise mit dem **Newton-Verfahren** ermittelt werden.

Ist  $x_0$  ein sinnvoll gewählter Näherungswert für die Nullstelle  $x_N$  so kann man  $x_0$  sukzessive verbessern durch folgende Iterationsvorschrift:

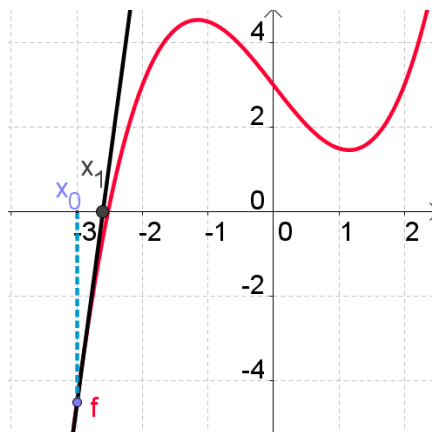
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel:

$$f(x) = 0.5x^3 - 2x + 3$$

$$f'(x) = 1.5x^2 - 2 \quad x_0 = -3$$

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -3 - \frac{-4,5}{11,5} \approx -2,609$$



Differentialrechnung (VIII)

Newtonverfahren

Lambacher Schweizer 11 Seite 81 ff

Ableitung von verketteten Funktionen (**Kettenregel**)

Ist  $f = u \circ v$  eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen  $u$  und  $v$ ,

so ist auch  $f$  differenzierbar, und es gilt für  $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ :

$$f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiele:

$$f(x) = 5(3x^2 - 7)^4 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 4(3x^2 - 7)^3 \cdot (6x)$$

$$v(x) = 3x^2 - 7 \quad \text{innere Funktion}$$

$$u(x) = 5x^4 \quad \text{äußere Funktion}$$

„Nachdifferenzieren“

$$g(x) = \sqrt{6x^3 - 5x} = (6x^3 - 5x)^{0,5} \Rightarrow g'(x) = 0,5(6x^3 - 5x)^{-0,5} \cdot (18x^2 - 5)$$

$$v(x) = 6x^3 - 5x \quad \text{innere Funktion}$$

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \text{äußere Funktion}$$

Differentialrechnung (IX)

Ableitung von verketteten Funktionen

Lambacher Schweizer 11 Seite 136 ff

Für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$$

**Beispiele:**  $f(x) = x^2 + 5 \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 5 \cdot \sin x$

$$f(x) = (\sin x)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

$$f(x) = x^3 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$$

Differentialrechnung (X)

Ableitung von trigonometr. Funktionen

Lambacher Schweizer 11 Seite 126ff

Für Potenzfunktionen gilt ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{IN}$ ):

$$f: x \rightarrow a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \sqrt[q]{x^p} \quad \Rightarrow \quad f': x \rightarrow a \cdot \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

**Beispiele:**  $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 1,5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1,5 \cdot \sqrt{x}^{-1}$

$$f(x) = 6 \cdot x^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt[3]{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 4 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{x}^{-1}$$

Differentialrechnung (XI)

Ableitung von Potenzfunktionen

Lambacher Schweizer 11 Seite 139 ff

Exponentialfunktion:  $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

Logarithmusfunktion:  $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

Die Funktion  $f: x \rightarrow e^{v(x)}$  hat die Ableitung  $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$ .

Die Funktion  $f: x \rightarrow \ln |v(x)|$  hat die Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Allg. Exponentialfunktion:  $f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$

Allg. Logarithmusfunktion:  $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

**Beispiele:**  $f(x) = 2 \cdot e^{7x+5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot e^{7x+5} \cdot 7 = 14 \cdot e^{7x+5}$

$$f(x) = 5^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln 5 \cdot 5^{x^2} \cdot 2x$$

$$f(x) = \ln(3x + 6) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3x + 6} \cdot 3 \quad (x > -2)$$

Differentialrechnung (XII)

Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Lambacher Schweizer 11 Seite 152 ff

1. Beschreiben der Größe, die extremal werden soll, durch einen Term, der mehrere Variablen enthalten kann.

2. Gegebenen Nebenbedingungen formulieren.

3. Die Zielfunktion bestimmen. (Sie hängt nur noch von einer Variablen ab.)

4. Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte. Ergebnis formulieren. (Randwerte berücksichtigen!)

**Beispiel:** Bestimme die Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a + b = 60$  und dem größten Produktwert.

$$P = a \cdot b$$

$$P(a) = a \cdot (60 - a) = -a^2 + 60a$$

$$P'(a) = -2a + 60$$

$$P'(a) = 0 \Rightarrow a = 30 = b$$

Die Zielfunktion kann durch geschickte Wahl der Variablen und die geeignete Verwendung von Nebenbedingungen entscheidend vereinfacht werden.

Differentialrechnung (XIII)

Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen

Lambacher Schweizer 11 Seite 201 ff

Ist die Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  differenzierbar, so erhält man durch Ableiten von  $f'$  die **zweite Ableitung  $f''$** .

Analog können auch höhere Ableitungen definiert werden.

<p><b>Beispiele:</b> <math>f(x) = 3x^6 - 2x + \sin x</math></p> <p><math>f'(x) = 18x^5 - 2 + \cos x</math></p> <p><math>f''(x) = 90x^4 - \sin x</math></p> <p><math>f'''(x) = 360x^3 - \cos x</math></p> <p>...</p>	<p><math>g(x) = \frac{2+x}{5-x}</math></p> <p><math>g'(x) = \frac{(5-x) \cdot 1 - (2+x) \cdot (-1)}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}</math></p> <p><math>g''(x) = \frac{(5-x)^2 \cdot 0 - 7 \cdot 2(5-x) \cdot (-1)}{(5-x)^4} = \frac{14}{(5-x)^3}</math></p> <p>...</p>
---	--

Differentialrechnung (XIV)

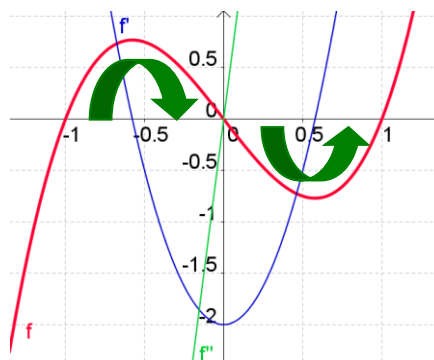
Die zweite Ableitung

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 44 ff

**Krümmungsverhalten eines Graphen:**

Bewegt man sich auf dem Graphen einer Funktion  $f$  in positiver  $x$ -Richtung und beschreibt man dabei eine Linkskurve (Rechtskurve), so heißt der Graph in diesem Bereich **linksgekrümmt (rechtsgekrümmt)**.



**Beispiel:**  $f(x) = 2x^3 - 2x$

**Kriterien für das Krümmungsverhalten**

Kriterium mithilfe der **ersten Ableitung:**

Für eine differenzierbare Funktion  $f$  gilt:

Wenn  $f'$  in einem Intervall  $I$  streng monoton abnehmend ist, dann ist der Graph von  $f$  dort rechtsgekrümmt.

Wenn  $f'$  in einem Intervall  $I$  streng monoton zunehmend ist, dann ist der Graph von  $f$  dort linksgekrümmt.

$f'(x) = 6x^2 - 2$

Für  $x < 0$  ist  $f'(x)$  str. m. abnehmend, also ist  $G_f$  rechtsgekrümmt!

Für  $x > 0$  ist  $f'(x)$  str. m. zunehmend, also ist  $G_f$  linksgekrümmt!

Kriterium mithilfe der **zweiten Ableitung:**

Für eine zweimal differenzierbare Funktion  $f$  gilt:

Wenn  $f''(x) < 0$  in  $I$  ist, dann ist der Graph von  $f$  dort rechtsgekrümmt.

Wenn  $f''(x) > 0$  in  $I$  ist, dann ist der Graph von  $f$  dort linksgekrümmt.

$f''(x) = 12x$

Für  $x < 0$  ist  $f''(x) < 0$  also ist  $G_f$  rechtsgekrümmt!

Für  $x > 0$  ist  $f''(x) > 0$  also ist  $G_f$  linksgekrümmt!

Differentialrechnung (XV)

Krümmungsverhalten

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 46 ff

Die Funktion  $f$  sei in einem Intervall  $I$  differenzierbar.

Eine Stelle  $x_0 \in I$  bei der der Graph von  $f$  von einer

Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung (oder

umgekehrt) übergeht, heißt **Wendestelle** von  $f$ .

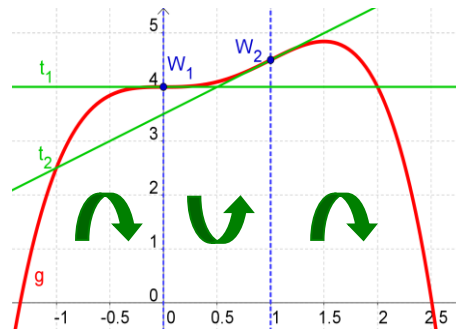
Der zugehörige Punkt  $W(x_0 | f(x_0))$  heißt **Wendepunkt**.

**Beispiel:**

$$g(x) = -0,5x^4 + x^3 + 4$$

$$g'(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$g''(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1)$$



$g''(x) = 0$  für  $x_1 = 0$  und  $x_0 = 1$   
mit Vorzeichenwechsel  $-/+$  bzw.  $+/-$

Wendepunkt  $W_1(0 | 4)$  = Terrassenpunkt  
Wendepunkt  $W_2(1 | 4,5)$

Tangenten:  $g'(0) = 0$  und  $g'(1) = 1$

$$t_1: y = 4 \quad \text{und} \quad t_2: y = x + 3,5$$

**Kriterium für eine Wendestelle:**

Die Funktion  $f$  sei in einem Intervall  $I$

zweimal differenzierbar und  $x_0 \in I$ .

Wenn  $f''(x_0) = 0$  und  $f''$  bei  $x_0$  einen

Vorzeichenwechsel hat, dann hat die

Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  eine **Wendestelle**.

Die Tangente im Wendepunkt heißt

**Wendetangente** und schneidet den

Graphen von  $f$ .

Ein Wendepunkt mit waagrechter

Tangente ist ein **Terrassenpunkt**.

Differentialrechnung (XVI)

Wendepunkte

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 50 ff

Die Funktion  $f$  sei in einem Intervall  $I$

zweimal differenzierbar und  $x_0 \in I$ .

Wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  ist,

dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein

lokales **Minimum**.

Wenn  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$  ist,

dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein

lokales **Maximum**.

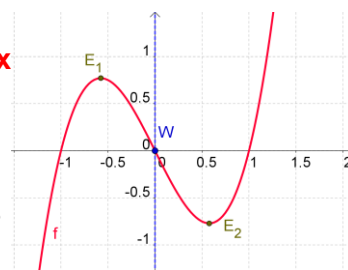
**Beispiel:**

$$f(x) = 2x^3 - 2x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0,58$$

$$f''(x) = 12x$$



$$f''(-0,58) < 0 \quad \text{also} \quad E_1(-0,58 | 0,77) = \text{MAX}$$

$$f''(+0,58) > 0 \quad \text{also} \quad E_2(0,58 | -0,77) = \text{MIN}$$

Differentialrechnung (XVII)

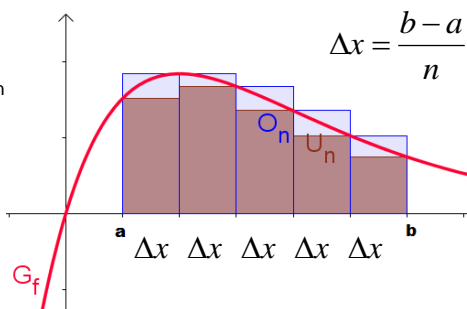
Kriterium für die Art der Extrema

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 50 ff

Für eine auf  $[a; b]$  definierte Funktion  $f$  ist das Integral von  $f$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  der gemeinsame Grenzwert von Untersumme  $U_n$  und Obersumme  $O_n$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} O_n$$



Integralrechnung (I)

Das Integral

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 11 ff

Gegeben sei die Funktion  $f$  in  $D_f$ . Die Funktion  $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  für  $a \in D_f$  heißt Integralfunktion von  $f$  zur unteren Grenze  $a$ .

**Beispiele:**  $I_{-3}(x) = \int_{-3}^x t^2 dt$  Integralfunktion zu  $f(t) = t^2$  zur unteren Grenze -3  
 $f(x) = x^2$   $I_4(x) = \int_4^x t^2 dt$  Integralfunktion zu  $f(t) = t^2$  zur unteren Grenze 4

Integralrechnung (II)

Integralfunktion

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 16 ff

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)**

Die Integralfunktion  $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  ist eine Stammfunktion von  $f$ ; d.h. es gilt:  $I_a'(x) = f(x)$

**Beispiel:**  
 $I_4(x) = \int_4^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - 21\frac{1}{3}$   
 $I'(x) = x^2$

Integralrechnung (III)

HDI

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 21 ff

Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a; b]$ , dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Beispiel:**  $f(x) = x^3 - 4x$   
 Bel. Stammfkt.:  $F(x) = 0,25x^4 - 2x^2$   
 Dann gilt:  $\int_1^3 x^3 - 4x dx = F(3) - F(1) = 2,25 - (-1,75) = 4$

Integralrechnung (IV)

Berechnung von Integralen

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 22 ff

Ist die lokale Änderungsrate einer Größe  $G$  durch eine Funktion  $m$  im Intervall  $[t_1; t_2]$  gegeben, dann kann man die Gesamtänderung  $G(t_2) - G(t_1)$  der Größe in diesem Intervall mit einem Integral bestimmen:

$$G(t_2) - G(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} m(t)dt$$

**Beispiel:** Momentangeschwindigkeit eines fallenden Körpers:  $v(t) = 9,81 \cdot t$   
 Berechnung der Fallhöhe  $h$  (in m) nach  $t = 2$  (in s):

$$\int_0^2 9,81 \cdot t dt = \left[ \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \right]_0^2 = 19,62$$

Integralrechnung (V)

Integral und Gesamtänderung einer Größe

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 8 ff

Flächen zwischen dem Graphen einer Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[a; b]$ :

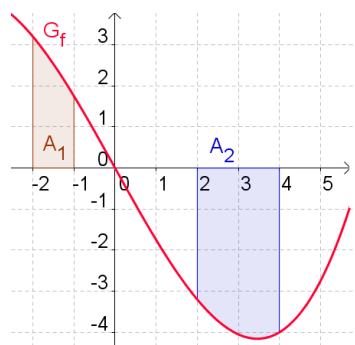
Es gilt für Flächen oberhalb der  $x$ -Achse:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (f(x) \geq 0 \text{ auf } [a; b])$$

und unterhalb der  $x$ -Achse:

$$A = -\int_a^b f(x) dx \quad (f(x) \leq 0 \text{ auf } [a; b])$$

**Beispiel:**  $f(x) = 0,05(x^3 - 36x)$



Im Beispiel oben gilt: 
$$A_1 = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = [0,05(\frac{1}{4}x^4 - 18x^2)]_{-2}^{-1} =$$

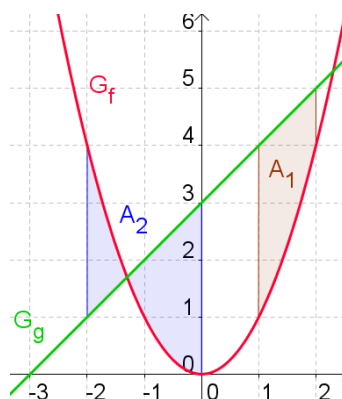
$$0,05(\frac{1}{4} - 18) - 0,05(\frac{1}{4}(-2)^4 - 18(-2)^2) = -0,8875 - (-3,4) = \underline{2,5125}$$

Und: 
$$A_2 = -\int_2^4 f(x) dx = -[F(x)]_2^4 = -(-11,2 - (-3,4)) = -(-7,8) = \underline{7,8}$$

Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$ , die sich im Intervall  $[a; b]$  nicht schneiden, und den Grenzen  $x = a$  und  $x = b$ :

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

**Beispiel:**  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x + 3$



$$A_1 = \left| \int_1^2 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_1^2 x^2 - x - 3 dx \right| = \left| [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x]_1^2 \right| = \left| -5\frac{1}{3} - (-3\frac{1}{6}) \right| = \underline{2\frac{1}{6}}$$

Falls sich die Graphen von  $f$  und  $g$  in  $[a; b]$  schneiden, sind jeweils die Inhalte der Teilflächen zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittstellen zu berechnen und die Werte zu addieren.

**Im Beispiel:** Schnittpunkt berechnen:  $x^2 = x + 3$  bzw.  $x^2 - x - 3 = 0$   
 Lösungsformel:  $x_1 \approx -1,3$  ( und  $x_2 \approx 2,3$ )

Somit: 
$$A_2 = \left| \int_{-2}^{-1,3} f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_{-1,3}^0 f(x) - g(x) dx \right| = \dots \approx 0,99 + 2,32 = \underline{3,31}$$

Integralrechnung (VI)

Berechnung von Flächeninhalten

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 33 ff

**Kommutativgesetz:**

Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man die Summanden (Faktoren) vertauscht.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**Assoziativgesetz:**

Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man Summanden (Faktoren) mit Klammern zusammenfasst oder vorhandene Klammern weglässt.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

**Distributivgesetz:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) : a = b : a + c : a \quad (a \neq 0)$$

**Rechengesetze**

**RECHENARTEN**

delta5  
delta6

Zahlen mit sehr großem bzw. mit sehr kleinem Betrag kann man mithilfe von Zehnerpotenzen übersichtlich darstellen:

*Beispiele:*  $87\,000\,000 = 8,7 \cdot 10\,000\,000 = 8,7 \cdot 10^7$

Komma um 7 Stellen nach links...

$$0,00035 = 3,5 \cdot 0,0001 = 3,5 \cdot 10^{-4}$$

Komma um 4 Stellen nach rechts...

Allg.:  $a \cdot 10^{\pm n}$  Für a gilt  $1 < a < 10$ .

**Wissenschaftliche Schreibweise**

„Gleitkomma-darstellung“

**RECHENARTEN**

delta8  
Seite 132

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis**

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \text{bzw.} \quad x^a : x^b = x^{a-b} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

*Beispiele:*  $4^2 \cdot 4^4 = 4^{2+4} = 4^6 = 4096$   $7^2 : 7^{-3} = 7^{2-(-3)} = 7^5 = 16807$

**Potenzieren einer Potenz**

$$(x^a)^b = x^{ab} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

*Beispiele:*  $(4^2)^4 = 4^8 = 65536$   $(3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten**

$$x^a \cdot y^a = (xy)^a \quad \text{bzw.} \quad x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

*Beispiele:*  $3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5 = 7776$   $4^{-2} : 2^{-2} = (4:2)^{-2} = 2^{-2} = 0,25$

**Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten**

**RECHENARTEN**

delta8  
Seite 134

Die nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz x ist, nennt man die **n-te Wurzel** aus x.

Es gilt also:

$$\sqrt[n]{x} \geq 0 \quad \text{und} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

Bezeichnungen: Der Term unter der Wurzel heißt **Radikand**.

n heißt **Wurzelexponent**. (Der Wurzelexponent 2 wird meistens weggelassen!)

*Beispiele:*  $\sqrt[3]{8} = 2$  (weil  $2^3 = 8$ )  $\sqrt[3]{125} = 5$  (weil  $5^3 = 125$ )

Schreibweise:

$$\sqrt[n]{x}$$

$$x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

**Allgemeine Wurzel**

**RECHENARTEN**

delta9  
Seite 110 ff

Allgemeine Wurzeln lassen sich auch als Potenzen darstellen:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{Dabei gilt: } x \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, m \in \mathbb{Z}$$

Beispiele:

$$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^3} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3 \qquad 512^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$$

$$256^{0,375} = 256^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{256^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = \sqrt[8]{(2^3)^8} = 2^3 = 8$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

RECHENARTEN

delta9  
Seite 114 ff

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{x^a}{x^p} \cdot x^q = x^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}} \quad x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } p, q \in \mathbb{N}$$

Potenzieren einer Potenz

$$\left(x^{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a \cdot b}{p \cdot q}}$$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$x^{\frac{a}{p}} \cdot y^{\frac{a}{p}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{p}} \quad \text{bzw.} \quad x^{\frac{a}{p}} : y^{\frac{a}{p}} = (x : y)^{\frac{a}{p}} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ und } a \in \mathbb{Z} \text{ und } p \in \mathbb{N}$$

Beispiele:  $2^{2,7} \cdot 2^{0,3} = 2^{\frac{27}{10}} \cdot 2^{\frac{3}{10}} = 2^3 = 8$

$$5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}} = 5^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{5^9} \approx 4,26$$

$$2^{\frac{3}{2}} \cdot 18^{\frac{3}{2}} = (2 \cdot 18)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{36})^3 = 6^3 = 216$$

$$40^{\frac{4}{5}} : 10^{\frac{4}{5}} = (40 : 10)^{\frac{4}{5}} = (\sqrt[5]{4})^4 \approx 3,03$$

$$\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 32^{\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2}} = 32^{\frac{6}{5}} = (\sqrt[5]{32})^6 = 2^6 = 64$$

$$\left(5^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{50}} = 5^{\frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 50}} = 5^{\frac{6}{25}} = \sqrt[25]{5^6}$$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

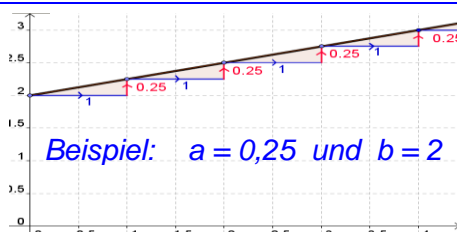
RECHENARTEN

delta9  
Seite 114 ff

Bei einem **linearen Wachstum** ist der Zuwachs pro Zeiteinheit konstant.

Gleichung:  $y = b + a \cdot x$

b ist der (Anfangs-)Bestand für x = 0.



Wachstum (I)

RECHENARTEN

delta10  
Seite 60 ff

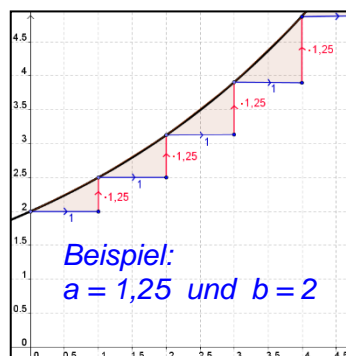
Bei **exponentiellem Wachstum** ist der Zuwachs immer direkt proportional zum aktuellen Bestand.

Gleichung:  $y = b \cdot a^x$

Für a > 1 heißt a der **Wachstumsfaktor**, ist a < 1, dann wird a **Abnahmefaktor** oder **Zerfallskonstante** genannt.

Die Zeitspanne, in der der Bestand jeweils halbiert wird, heißt **Halbwertszeit**.

$$t_H = \log_a 0,5 = \frac{\log 0,5}{\log a} \quad (0 < a < 1)$$



Wachstum (II)

RECHENARTEN

delta10  
Seite 60 ff



**Exponentielle Wachstumsprozesse**

Jeder Wachstumsprozess, bei dem der Bestand je Zeiteinheit um einen konstanten Faktor zunimmt, kann durch eine Exponentialfunktion  $f$  beschrieben werden. Der Funktionsterm kann die Form  $f(t) = c \cdot a^t$  oder  $f(t) = c \cdot e^{kt}$  haben und damit gilt dann  $k = \ln a$ .

Dabei ist:  $c$  der Bestand zum Zeitpunkt  $t = 0$   
 $f(t)$  der Bestand zum Zeitpunkt  $t$   
 $f$  die Wachstumsfunktion

$a > 0$  nennt man den **Wachstumsfaktor**,  
 $a - 1$  die **relative (prozentuale) Änderung** pro Zeiteinheit und  
 $k$  die **Wachstumskonstante**.

*Beispiel:*  
 Bakterien:  $c = 5000$   
 Anzahl wächst um 30% / h

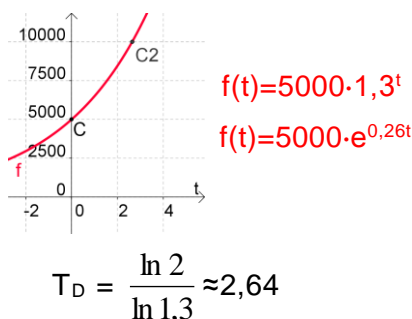
$a = 1,3$   
 $a - 1 = 0,3 = 30\% / h$   
 $k = \ln 1,3 \approx 0,26$

**Verdoppelungs- und Halbwertszeit**

Wird ein exponentieller Wachstumsprozess durch eine Funktion  $f(t) = c \cdot a^t$  beschrieben, so erhält man

für  $k > 0$  die Verdopplungszeit  $T_D = \frac{\ln 2}{k}$  bzw.

für  $k < 0$  die Halbwertszeit  $T_H = -\frac{\ln 2}{k}$ .



**Wachstum (III)**

**RECHENARTEN**

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
 Seite 156 ff

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
 Seite 160 ff

Die Gleichung  $b^x = p$  hat die Lösung  $x = \log_b p$  („Logarithmus von  $p$  zur Basis  $b$ “)

$b, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

*Beispiele:*  $2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2 8 = 3$        $3^x = 15 \Rightarrow x = \log_3 15$        $25^x = 625 \Rightarrow x = \log_{25} 625 = 2$

$\log_b p$  ist diejenige Zahl, mit der man die Basis  $b$  potenzieren muss, um  $p$  zu erhalten.

Das **Logarithmieren zur Basis  $b$**  ist eine Umkehrung des **Potenzierens der Basis  $b$** . z.B.  $b=3: 2 \xrightarrow{3^2} 9 \xrightarrow{\log_3 9} 2$

*Allgemein:*  $\log_b (b^x) = x$  und  $b^{\log_b y} = y$  mit  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$

*Sonderfälle:*  $\log_b 1 = 0$  und  $\log_b b = 1$  und  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

*Schreibweise:*  $\log_{10} x = \log x = \lg x$

**Logarithmus**

**RECHENARTEN**

delta10  
 Seite 70 ff

- $\log_b (pq) = \log_b p + \log_b q$  (Logarithmus eines Produkts)
- $\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$  (Logarithmus eines Quotienten)
- $\log_b (p^r) = r \cdot \log_b p$  (Logarithmus einer Potenz)
- $\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$  (Basiswechsel)

Dabei:  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  und  $p, q \in \mathbb{R}^+$  und  $r \in \mathbb{R}$

**Rechenregeln für den Logarithmus**

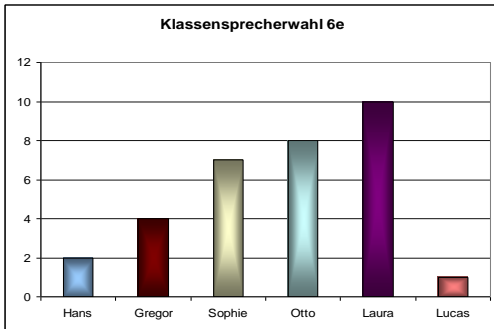
**RECHENARTEN**

delta10  
 Seite 74 ff

Tabelle

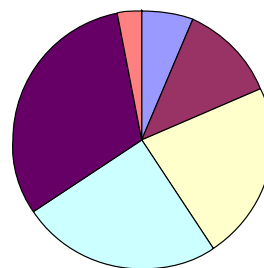
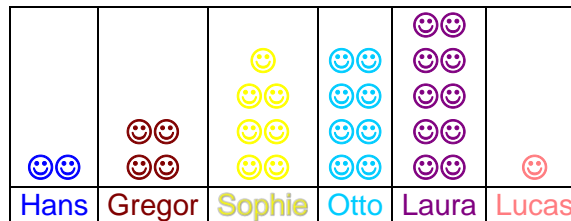
Schüler	Hans	Gregor	Sophie	Otto	Laura	Lucas
Stimmen	2	4	7	8	10	1
Anteil (%)	6,25%	12,5%	≈21,88%	25%	31,25%	≈3,13%

Säulendiagramm



Blockdiagramm (Streifendiagramm)

Bilddiagramm



Kreisdiagramm

Tabellen und Diagramme

delta5  
Seite 22

delta6  
Seite 34

Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, d.h. nicht voraussagbar ist, nennen wir **Zufallsexperimente**.

**Beispiele:** Werfen einer Münze ; Ziehen von Kugel (Lottozahlen) ; Glücksrad drehen ; Spielwürfel werfen

**Beispiel:** Ein Spielwürfel wird 25-mal geworfen: Treffer (T) wäre z.B. eine Sechs, eine Niete (N) wäre dann eine 1, 2, 3, 4 oder 5.

**Ergebnisse:**

Strichliste		Tabelle	
Augenzahl	Anzahl	Augenzahl	Anzahl
6		6	4
keine 6		keine 6	21

Zufalls-experimente

delta6  
Seite 62

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu einer **Ergebnismenge** (man spricht auch von einem **Ergebnisraum**) zusammen.

Diese wird häufig mit dem Buchstaben  $\Omega$  bezeichnet.

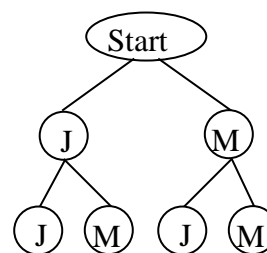
**Beispiel:**

Geschwisterfolge bei zwei Kindern (**J**unge/**M**ädchen)

Mögliche Ergebnisse: JJ; JM; MJ; MM

Ergebnismenge  $\Omega = \{JJ; JM; MJ; MM\}$

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments lassen sich durch ein **Baumdiagramm** übersichtlich darstellen.



Ein Zufallsexperiment nennt man **einstufig** oder **mehrstufig**, je nachdem, ob man es in einem oder mehreren Schritten durchführt.

Ergebnismenge

delta8  
Seite 92 ff

delta9  
Seite 144 ff

Werden bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammengefasst, so erhält man ein **Ereignis**.

Die Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse**.

Ein Ereignis, für das alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments günstig sind, heißt **sicheres Ereignis**.

Ein Ereignis, das bei diesem Zufallsexperiment nicht eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis**.

Alle für ein Ereignis E ungünstigen Ergebnisse bilden zusammen dessen **Gegeneignis**  $\bar{E}$ .

Ereignisse werden häufig in Mengenform angegeben.

**Gegeneignis** von A:  $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Ereignis A **und** Ereignis B:  $A \cap B$

Ereignis A **oder** Ereignis B:  $A \cup B$

Ereignis A **ohne** Ereignis B  
(Ereignis A **und nicht** Ereignis B):  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

**Weder** Ereignis A **noch** Ereignis B:  $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

**Nicht beide** Ereignisse A und B **gleichzeitig**:  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

*Beispiele:*

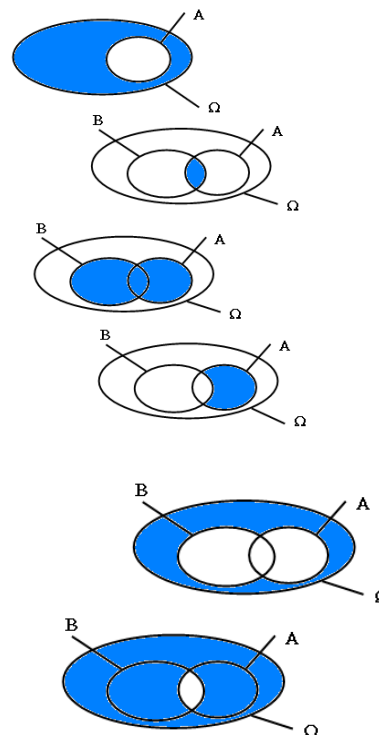
**Experiment:** Werfen eines Würfels  
**Ereignis  $E_1$ :** Werfen einer geraden Augenzahl

Die Augenzahlen 2 und 4 und 6.  
 $E_1 = \{ 2; 4; 6 \}$

**$E_2$ :** Werfen einer natürlichen Zahl  
 $E_2 = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \} = \Omega$

**$E_3$ :** Werfen der Zahl -5  
 $E_3 = \{ \} = \emptyset$

Gegeneignis zu  $E_1$   
 $\bar{E}_1$ : Werfen einer ungeraden Augenzahl  
 $\bar{E}_1 = \{ 1; 3; 5 \}$



**Ereignisse**

delta8  
Seite 94 ff

**Zusammen-  
gesetzte  
Ereignisse**

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 177 ff

**Gesetze von  
de Morgan**

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 178 ff

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 25-mal) geworfen und es erscheint dabei k-mal (z.B. 4-mal) die Augenzahl 6.

**Absolute Häufigkeit** der „Sechser“: 4 (Anzahl der Sechser“)

**Relative Häufigkeit** der „Sechser“:  $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$  (Anteil der „Sechser“)

**Allgemein: Relative Häufigkeit**

$$\frac{k}{n} = \frac{\text{„Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eingetreten ist“}}{\text{„Anzahl, wie oft das Experiment durchgeführt wurde“}}$$

**Relative Häufigkeit**

delta6  
Seite 64

delta8  
Seite 96 ff

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so ändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis E eintritt, schließlich nur noch sehr wenig:

Die relative Häufigkeit des Ereignisses E schwankt um eine feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses E.

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ist ein **Schätzwert** für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

**Beispiel:** Experiment: Werfen einer Münze

Anzahl n der Würfe	Anzahl k der „Adler“	Relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit)
100	48	0,48 = 48 %
1000	517	0,517 = 51,7 %

**Wahrscheinlichkeit**

delta8  
Seite 96 ff

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente**.

Sind bei einem Laplace-Experiment 2 (3; 4; 5; 6; ... n) verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse:  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}$ ).



Dementsprechend nennt man einen idealen Spielwürfel einen **Laplace-Würfel** (L-Würfel), eine ideale Münze **Laplace-Münze** (L-Münze).

Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E direkt berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{„Anzahl der günstigen Ergebnisse“}}{\text{„Anzahl aller möglichen Ergebnisse“}}$$

**Laplace-Experimente**

**Laplace-Wahrscheinlichkeit**

delta8  
Seite 102 ff

Erfüllt eine Funktion  $P : A \rightarrow P(a)$  mit  $A \subset \Omega$  und  $P(A) \in \mathbb{R}$  folgende Bedingungen, (Axiome von Kolmogorow), so heißt sie **Wahrscheinlichkeitsverteilung**:

**Axiom I:**  $P(A) \geq 0$

**Axiom II:**  $P(\Omega) = 1$

**Axiom III:** Wenn  $A \cap B = \{ \}$ , dann muss gelten:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

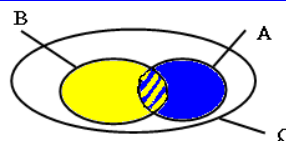
$P(A)$  heißt **Wahrscheinlichkeit von A**.

**Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 174 ff

Für zwei Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Additionssatz

Lambacher Schweizer 11  
Seite 180 ff

Es sollen z. B. vier Stellen besetzt werden.

Gibt es für die Besetzung der 1. Stelle  $n_1$  2. Stelle  $n_2$  3. Stelle  $n_3$  4. Stelle  $n_4$

verschiedene Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$  verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

**Beispiel:** Wie viele verschiedene fünfstelligen natürlichen Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 3; 5; 7; 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern...

a) genau einmal vorkommen darf?

Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen:  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

Null darf nicht vorne stehen!

Bleiben noch 4 mögliche

b) auch mehr als einmal vorkommen darf?

Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen:  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$

**Beispiel:** Auf wie viele Arten kann man vier verschiedene Bücher nebeneinander in ein Regal stellen? Lösung:  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  Möglichkeiten

Zählprinzip

delta8  
Seite 98 ff

Viele Zufallsexperimente kann man durch ein so genanntes

**Urnenmodell simulieren:**

Eine Urne enthält verschiedenfarbige, aber sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus nun k-mal hintereinander jeweils eine Kugel „blind“.

a) **Ziehen mit Zurücklegen:** Nach dem Notieren der Farbe wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit nicht!)

b) **Ziehen ohne Zurücklegen:** Die gezogene Kugel wird **nicht** wieder in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit ständig!)

Urnenmodelle (I)

delta9  
Seite 148 ff

Eine Urne enthält n unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus nun hintereinander jeweils eine Kugel „blind“ (die Reihenfolge wird also beachtet!).

a) **k-mal Ziehen mit Zurücklegen:**

Es gibt  $n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

verschiedene Ergebnisse (k-Tupel).

b) **k-mal Ziehen ohne Zurücklegen:**

Es gibt  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

verschiedene Ergebnisse.

c) **n-mal Ziehen (alle Kugeln) ohne Z.:**

Es gibt  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

verschiedene **Permutationen**.

**Beispiel:**

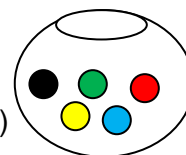
3 x Ziehen

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$  (mit Z.)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  Möglichkeiten (ohne Z.)

5 x Ziehen (alle Kugeln – ohne Z.)

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$  Permutationen



Urnenmodelle (II)

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 71 ff

Eine Urne enthält  $n$  unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus **gleichzeitig**  $k$  Kugeln „blind“ (Also **ohne** die Reihenfolge zu beachten!).

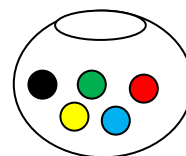
Die Anzahl der möglichen Ergebnisse beträgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1}{k!(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

„Binomialkoeffizient“

„ $n$  über  $k$ “ oder „ $k$  aus  $n$ “

(TIPP: Taschenrechner **nCr** )



Beispiel: 3 Kugeln gleichzeitig aus dieser Urne:  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

4 Kugeln gleichzeitig aus dieser Urne:  $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$  (eine der 5 bleibt...)

Urnenmodelle (III)

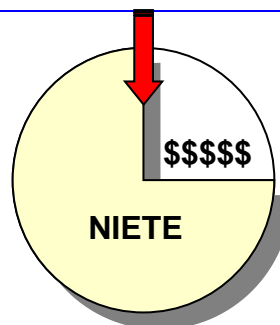
Binomialkoeffizient

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 74 ff

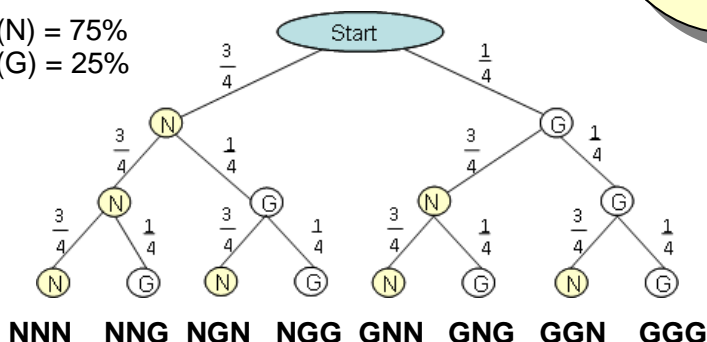
Besonders bei mehrstufigen Zufallsexperimenten sind Baumdiagramme zur Veranschaulichung sehr nützlich.

Beispiel: Ein Glücksrad (s. Bild) wird dreimal hintereinander gedreht.



Das entsprechende Baumdiagramm mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten sieht so aus:

N: Niete  $P(N) = 75\%$   
G: Gewinn  $P(G) = 25\%$



Ergebnismenge  $\Omega = \{ NNN, NNG, NGN, NGG, GNN, GNG, GGN, GGG \}$

- 1) Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an Zweigen von einem Knoten aus ergibt jeweils 1. *Im Beispiel gilt immer:  $0,75 + 0,25 = 1$*
- 2) Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

Bsp:  $P(NNN) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \approx 42,2\%$        $P(GNG) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64} \approx 4,7\%$

- 3) Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten derjenigen **Ergebnisse**, die zu diesem Ereignis führen.

Bsp:  $P(\text{"Genau ein Niete"}) = P(GGN; GNG; NGG) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \approx 14,1\%$

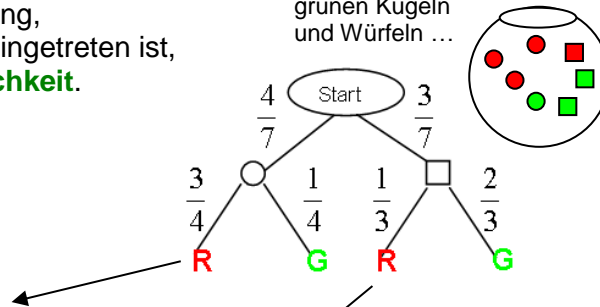
Baumdiagramme

Pfadregeln

Unter der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass vorher bereits das Ereignis B eingetreten ist, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bsp.: Urne mit roten bzw. grünen Kugeln und Würfeln ...



Nach den Pfadregeln gilt:  $P(R \cap O) = P(O) \cdot P_O(R) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$

$P(R \cap \square) = P(\square) \cdot P_\square(R) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

Beispiele:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn eine Kugel (O) gezogen wurde?

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn ein Würfel (□) gezogen wurde?

$$P_\square(R) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

delta10 Seite 100 ff

In einer **Vierfeldertafel** kann man die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen darstellen, wenn zwei Merkmale mit je zwei Ausprägungen betrachtet werden.

Beispiel:

$$P_{\text{Männlich}}(B) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{16\%}{59\%} \approx 27\%$$

	M	W	
B	16%	12%	28%
$\bar{B}$	43%	29%	72%
	59%	41%	100%

M Männlich  
W Weiblich  
B Brillenträger

Vierfeldertafel

delta10 Seite 92 ff

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn gilt:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sind zwei Ereignisse A und B unabhängig, so ist die zugehörige Vierfeldertafel eine **Multiplikationstafel**.

Achtung Unterschied:

- „**Wahrscheinlichkeit** von A und B“:  $P(A \cap B)$  sowie „**Bedingter Wahrscheinlichkeit von B unter A**“  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- „**Unvereinbarkeit**“ von A und B:  $A \cap B = \{ \}$  sowie „**Unabhängigkeit**“ von A und B:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Unabhängigkeit

Lambacher Schweizer 11 Seite 182 ff

Zufallsgrößen

**\*NEU\***

Lambacher  
Schweizer 12  
Seite 60 ff

**\*NEU\***

Lambacher  
Schweizer 12  
Seite 66 ff

Eine Funktion  $X$ , die jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl  $X(\omega)$  zuordnet, heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** auf  $\Omega$ .

Kurz:  $X: \omega \mapsto X(\omega)$  mit  $\omega \in \Omega$  und  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ .

Die Funktion, die jedem Wert  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) einer Zufallsgröße  $X$  die Wahrscheinlichkeit  $P(X = x_i)$  zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion** der Zufallsgröße  $X$  oder **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße  $X$ .

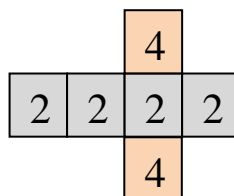
Ist  $X$  eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sind, so heißt die reelle Zahl  $E(X)$  mit  $E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$  **Erwartungswert der Zufallsgröße  $X$** .

**Varianz der Zufallsgröße  $X$**  nennt man die reelle Zahl  $Var(X)$  mit  $Var(X) = \sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$ .

**Standardabweichung:**  $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

*Beispiel:*

Dieser Würfel wird zweimal geworfen. Sein Netz:  $\Omega = \{ (2;2), (2;4), (4;2), (4;4) \}$



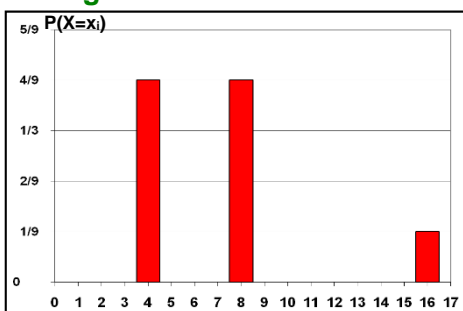
Die Zufallsgröße  $X$  ordne jedem Ergebnis das Produkt der zwei Würfe zu.

$x_i$	4	8	16	Mögliche Werte von $X$
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$	$2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilung</b>

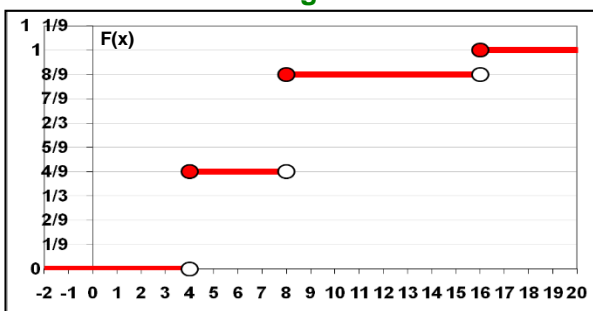
$$E(X) = \mu = 4 \cdot \frac{4}{9} + 8 \cdot \frac{4}{9} + 16 \cdot \frac{1}{9} = 7 \frac{1}{9}$$

$$Var(X) = (4 - 7 \frac{1}{9})^2 \cdot \frac{4}{9} + (8 - 7 \frac{1}{9})^2 \cdot \frac{4}{9} + (16 - 7 \frac{1}{9})^2 \cdot \frac{1}{9} = 13 \frac{35}{81} \Rightarrow \sigma \approx 3,66$$

**Histogramm:**



**Kumulative Verteilungsfunktion von  $X$ :**



$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=4) = \frac{4}{9}$$

$$F(8) = P(X \leq 8) = P(X=4) + P(X=8) = \frac{8}{9}$$

$$F(16) = P(X=4) + P(X=8) + P(X=16) = \frac{9}{9} = 100\%$$

$$F(x) = 0 \quad x \in ]-\infty ; 4[$$

$$F(x) = \frac{4}{9} \quad x \in [4 ; 8[$$

$$F(x) = \frac{8}{9} \quad x \in [8 ; 16[$$

$$F(x) = 1 \quad x \in [16 ; \infty[$$

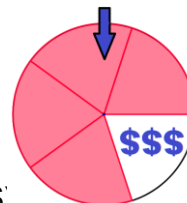


**Bernoulli-Experiment** heißt ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen

Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit  $p$ , die für Niete mit  $q$  bezeichnet, dabei gilt:  $q = 1 - p$ .

Ein Zufallsexperiment, das aus  $n$  unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit Parameter  $p$** .

**Beispiel:**  
Einmaliges Drehen dieses Glücksrades



$p = 0,2$  (Treffer; \$\$\$)  
 $q = 1 - 0,2 = 0,8$

Zehnmaliges Drehen des Rades: Bernoulli-Kette der Länge 10 mit dem Parameter  $p = 0,2$

**Bernoulli-Experiment**

**Bernoulli-Kette**

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 77 ff

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
Seite 79 ff

**Trefferzahl in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$**

Ist  $p$  die Trefferwahrscheinlichkeit und gibt die Zufallsgröße  $X$  die Anzahl der Treffer an, so gilt für die Wahrscheinlichkeit für genau  $k$  Treffer:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{mit } k \in \{0; 1; \dots; n\}$$

$X$ : Anzahl der Treffer (\$\$\$)  
Werte von  $X$ : 0, 1, ... 10

$$P(\text{„3 Treffer“}) = P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^7 \approx 20,1\%$$

**TIPP: Arbeiten mit dem „Tafelwerk“**

Ist die Länge  $n$ , die Treffer-Wahrscheinlichkeit  $p$  und die Trefferzahl  $k$  gegeben, so kann man den Wert

$$P(X = k) = P^n(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

oft im Tafelwerk nachschlagen.

Ebenso die summierten Wert sind zu finden:

$$F_{n;p}(k) = P(X \leq k) =$$

$$P(x = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

**Zum Beispiel:**

$$P(\text{„7 Treffer“}) = P(X = 7) \approx 0,00079 \approx 0,079\%$$

$$P(\text{„bis zu 5 Treffer“}) = P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 B(10; 0,2; i) \approx 0,99363 \approx 99,4\%$$

$$P(\text{„mehr als 3 Treffer“}) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,87913 \approx 12\%$$

$$P(\text{„mindestens 2, höchstens 6 Treffer“}) = P(2 \leq X \leq 6) = \sum_{i=2}^6 B(10; 0,2; i) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \approx 0,99914 - 0,37581 \approx 62,3\%$$

		p = 0,2	
n	k	B(n,p,k)	$\sum_{i=0}^k B(n, p; i)$
10	0	0,10737	0,10737
	1	0,26844	0,37581
	2	0,30199	0,67780
	3	0,20133	0,87913
	4	0,08808	0,96721
	5	0,02642	0,99363
	6	0,00551	0,99914
	7	0,00079	0,99992
	8	0,00007	1,00000
	9		
	10		

Eine Zufallsgröße  $X$  heißt **binomialverteilt** nach  $B(n; p)$  oder  $B_{n; p}$ , wenn gilt:

- $X$  kann die Werte  $0; 1; 2; \dots; n$  annehmen
- $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$  mit  $0 \leq p \leq 1$

Erwartungswert einer  $B(n; p)$  – verteilten Zufallsgröße ist  $\mu = n \cdot p$ .

Für die Varianz  $\sigma^2$  einer  $B(n; p)$  – verteilten Zufallsgröße gilt  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ .

**Beispiel:**  $n = 10$  mal (drehen)

$X$ : Anzahl Treffer

$p = 0,2$

Die Trefferzahl ist  $B(10; 0,2)$  – verteilt.

$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0,2 = 2$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 1,6$$

$$\sigma \approx 1,26$$

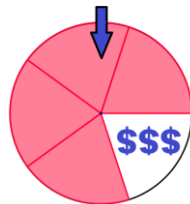
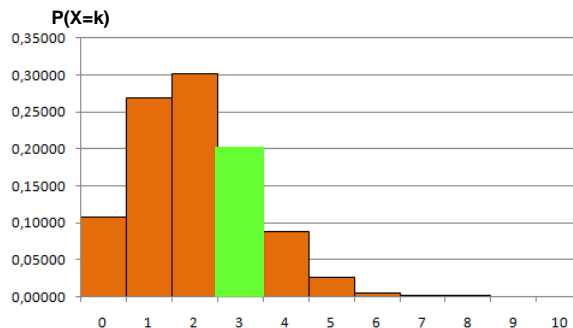


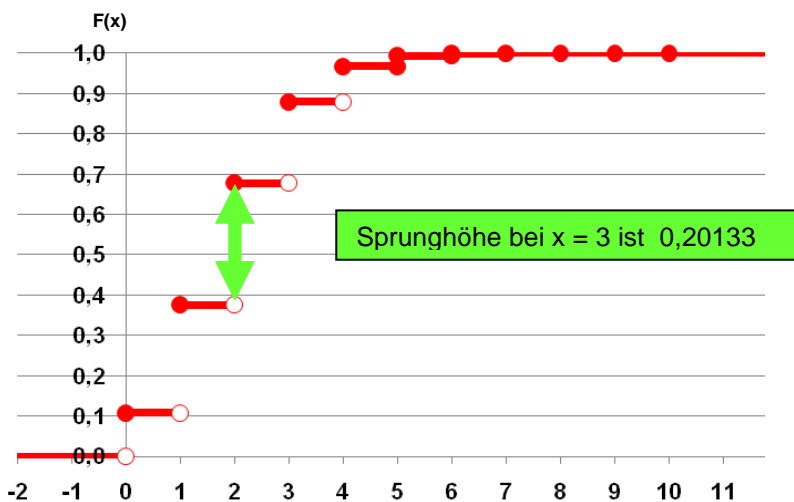
Tabelle:

		p = 0,2		
n	k	B(n,p,k)	$\sum_{i=0}^k B(n, p; i)$	
10	0	0,10737	0,10737	
	1	0,26844	0,37581	
	2	0,30199	0,67780	
	3	0,20133	0,87913	
	4	0,08808	0,96721	
	5	0,02642	0,99363	
	6	0,00551	0,99914	
	7	0,00079	0,99992	
	8	0,00007	1,00000	
	9			
	10			

**Histogramm:**



**Kumulative Verteilungsfunktion von X:**



**\*NEU\***

Lambacher  
Schweizer 12  
Seite 79 ff

Bei Problemstellungen der beurteilenden Statistik wird nach dem unbekanntem Anteil einer Merkmalsausprägung an einer Grundgesamtheit gefragt.

**Wahrscheinlichkeitsrechnung:**

Bekannt ist: Anteil  $p$  der schwarzen Kugeln einer Urne  
 Gesucht: Wahrscheinlichkeit für 2 x „schwarz“ bei 7 x Ziehen

**Beurteilende Statistik:**

Bekannt ist: Bei 7 x Ziehen erhielt man 2 x „schwarz“  
 Gesucht: Anteil  $p$  der roten Kugeln

Beurteilende Statistik

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
 Seite 98 ff

Über einen Sachverhalt werden zwei sich ausschließende Hypothesen betrachtet:

Die **Nullhypothese**  $H_0$  und die **Gegenhypothese**  $H_1$ . Getestet wird, ob aufgrund der Stichprobenergebnisse  $H_0$  verworfen werden kann oder nicht. Dazu wird der Wertebereich der Testgröße in den Ablehnungsbereich (kritischer Bereich)  $K$  und den Annahmehbereich  $\bar{K}$  zerlegt.

**Entscheidungsregel:**

Liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in  $K$ , dann wird  $H_0$  verworfen, ansonsten wird  $H_0$  nicht verworfen.

**Beispiel:** Stichprobenlänge:  $n = 10$  Karten sollen erraten werden  
 Treffer: „Begabte“ Person kann Werte von ESP-Karten „hellsehen“  
 Testgröße  $Z$ : Anzahl richtiger „Vorhersagen“  
 $H_0: p = 0,2$  Person hat keine Begabung –  $p_{\text{Raten}} = 1/5$   
 $H_1: p > 0,2$  Person hat besondere Fähigkeiten



Entscheidungsregel:

Ablehnungsbereich von  $H_0$ :  $K = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$  Entscheidung für  $H_1$   
 Annahmehbereich von  $H_0$ :  $\bar{K} = \{0; 1; 2; 3\}$  Entscheidung für  $H_0$

Testen von Hypothesen

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
 Seite 98 ff

**Fehler 1. Art und Fehler 2. Art beim Testen von Hypothesen**

- **Fehler 1. Art:**

Die Nullhypothese  $H_0$  trifft zu, wird aber abgelehnt, da  $Z \in K$ .  
 Wahrscheinlichkeit  $\alpha'$  für den Fehler 1. Art:  $\alpha' = P_{H_0}(Z \in K)$

- **Fehler 2. Art:**

Die Gegenhypothese  $H_1$  trifft zu, aber die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, da  $Z \in \bar{K}$ .  
 Wahrscheinlichkeit  $\beta'$  für den Fehler 2. Art:  $\beta' = P_{H_1}(Z \in \bar{K})$   
 Der Fehler 2. Art kann nicht problemlos bestimmt werden, da die Wahrscheinlichkeit  $\beta'$  von  $p$  abhängt.

Bei festem Stichprobenumfang  $n$  bewirkt eine Verkleinerung von  $\beta'$  eine Vergrößerung von  $\alpha'$  und umgekehrt. Eine Verringerung beider Fehler ist nur durch Erhöhung des Stichprobenumfangs möglich.

Fehler 1. Art und Fehler 2. Art

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12  
 Seite 101 ff

Zum Beispiel von oben:

Fehler 1. Art: Einer normal begabten Person werden irrtümlich außersinnliche Wahrnehmung zugeschrieben.

$$\alpha' = P_{H_0}(Z \in K) = P_{0,2}^{10}(Z \geq 4) = 1 - P_{0,2}^{10}(Z \leq 3) = 0,12087 \dots \approx 12,1\%$$

Fehler 2. Art: Man nimmt fälschlicherweise an, dass eine besonders begabte Person nur geraten hat. Annahme zur Berechnung von  $\beta'$ :  $p = 40\%$

$$\beta' = P_{H_1}(Z \in \bar{K}) = P_{0,4}^{10}(Z \leq 3) = 0,382 \dots \approx 38,2\%$$

Fehler 1. Art und Fehler 2. Art

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 101 ff

Eine vorgegebene Obergrenze für den Fehler 1. Art nennt man Signifikanzniveau  $\alpha$ . Daraus ergibt sich der kritische Bereich des Tests.

Vorgehen beim einseitigen Signifikanztest:

1. Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.
2. Mathematische Formulierung der Nullhypothese  $H_0$  und der Gegenhypothese  $H_1$ .
3. Festlegen des Signifikanzniveaus  $\alpha$ .
4. Bestimmen der Entscheidungsregel d.h. Konstruktion des kritischen Bereichs K.

Linksseitiger Test:

$$H_0: p = p_0 \text{ (oder } p \geq p_0)$$

$$H_1: p < p_0$$

kritischer Bereich

$$K = \{0; 1; 2; \dots; g\}$$

wobei g die größte ganze

$$\text{Zahl ist mit } \alpha' = P_{p_0}^n(Z \leq g) \leq \alpha.$$

Rechtsseitiger Test:

$$H_0: p = p_0 \text{ (oder } p \leq p_0)$$

$$H_1: p > p_0$$

kritischer Bereich

$$K = \{g; g+1; g+2; \dots; n\}$$

wobei g die kleinste ganze

$$\text{Zahl ist mit } \alpha' = P_{p_0}^n(Z \geq g) \leq \alpha$$

Zum Beispiel von oben:

Gewünschtes Signifikanzniveau: 5%, d.h. Fehler 1. Art soll höchstens 5% betragen:

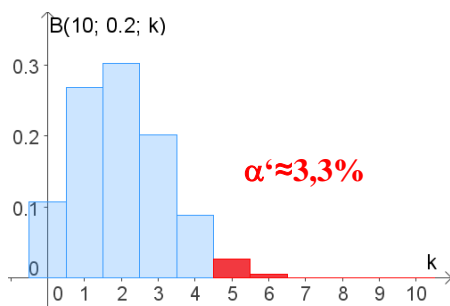
$$\alpha' = P_{H_0}(Z \in K) = P_{0,2}^{10}(Z \geq g) \leq 0,05 \text{ mit } K = \{g; g+1; g+2; \dots; n\}$$

$$\text{Somit: } P_{0,2}^{10}(Z \leq g-1) \geq 0,95$$

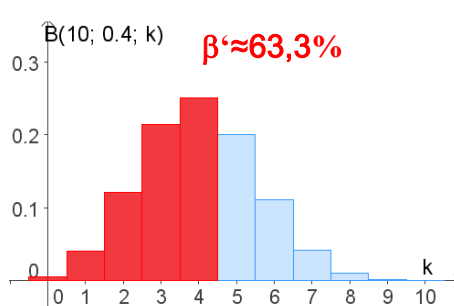
Aus der Tabelle:  $g-1 = 4$  ( $P_{0,2}^{10}(Z \leq 4) = 0,96721$ ), also ist  $K = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ .

Sind von 10 Karten mindestens 5 richtig erkannt worden, dann kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% auf eine Begabung der Person schließen.

$H_0$  wahr  $p = 0,2$



$H_0$  falsch  $p = 0,4$



Signifikanztest

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 106 ff

**Geometrische Grundfiguren**

**Quadrat** **Rechteck** **Raute** **Parallelogramm** **Trapez** **Kreis**

**Seite** **Diagonale** **Ecke** **Radius** **Mittelpunkt** **Durchmesser**

delta5 Seite 72

**Geometrische Grundkörper**

**Würfel** **Quader** **Zylinder** **Kugel**

**Kante** **Ecke** **Fläche** **Prisma** **Kegel** **Pyramide**

delta5 Seite 72

**Koordinatensystem**

**Zweidimensionales Koordinatensystem:**

**Dreidimensionales Koordinatensystem:**

delta5 Seite 86

Lambacher Schweizer 11 Seite 90 ff

Geometrische Grundfiguren

GEOMETRIE

delta5 Seite 72

Geometrische Grundkörper

GEOMETRIE

delta5 Seite 72

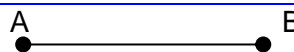
Koordinatensystem

GEOMETRIE

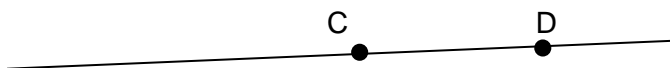
delta5 Seite 86

Lambacher Schweizer 11 Seite 90 ff

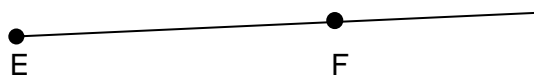
Strecke **[AB]** mit den Endpunkten A und B  
und der Streckenlänge  $\overline{AB} = 3,2 \text{ cm}$



Gerade **CD**



Halbgerade (Strahl) **[EF]**  
mit Anfangspunkt E



Strecke, Gerade,  
Halbgerade

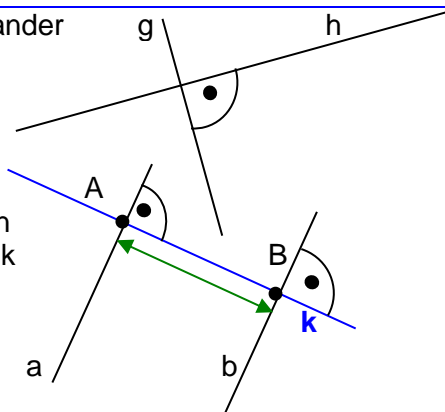
GEOMETRIE

delta5  
Seite 74

Geraden, Halbgeraden oder Strecken, die miteinander  
einen rechten Winkel bilden, stehen **aufeinander  
senkrecht**.

Schreibweise:  $g \perp h$

Zwei Geraden a und b (der Zeichenebene) heißen  
**zueinander parallel**, wenn es eine dritte Gerade k  
gibt, die auf jeder der beiden senkrecht steht.



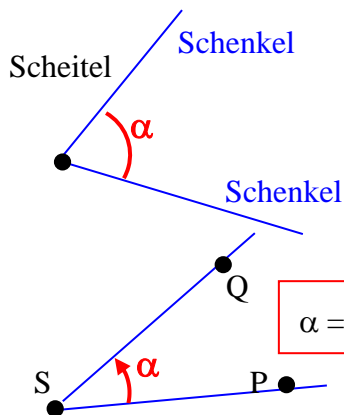
Schreibweise:  $a \parallel b$

Abstand d der Geraden a und b:  $d = \overline{AB}$

Senkrecht,  
parallel

GEOMETRIE

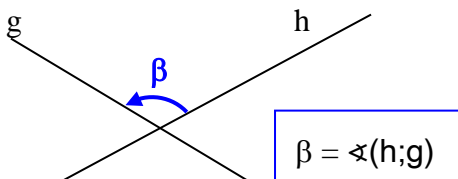
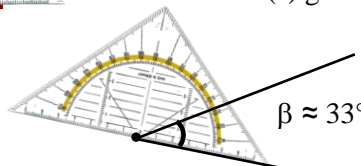
delta5  
Seite 76



Rechte Winkel ( $90^\circ$ ) am Geodreieck

Die Größe eines Winkels  
wird in Grad ( $^\circ$ ) gemessen.

Winkel messen:



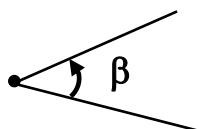
Winkel (I)

GEOMETRIE

delta5  
Seite 82



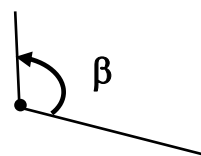
Nullwinkel  
 $\beta = 0^\circ$



Spitzer Winkel  
 $0^\circ < \beta < 90^\circ$



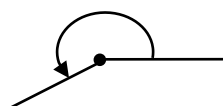
Rechter Winkel  
 $\beta = 90^\circ$



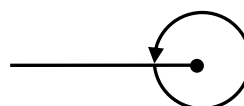
Stumpfer Winkel  
 $90^\circ < \beta < 180^\circ$



Gestreckter Winkel  
 $\beta = 180^\circ$



Überstumpfer Winkel  
 $180^\circ < \beta < 360^\circ$

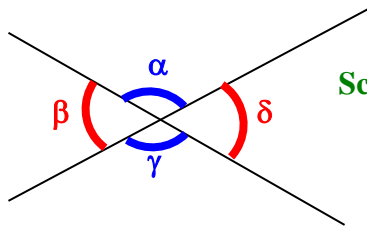


Vollwinkel  $\beta = 360^\circ$

Winkel (II)  
Bezeich-  
nungen

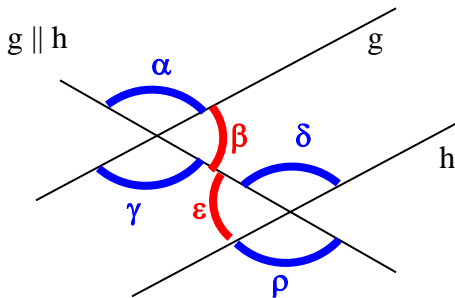
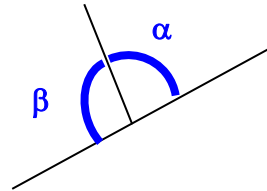
GEOMETRIE

delta5  
Seite 82



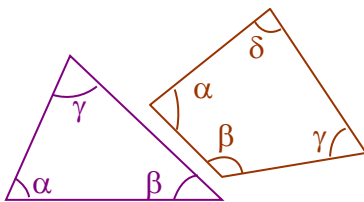
**Scheitelwinkel** sind gleich groß:  $\alpha = \gamma$  und  $\beta = \delta$

**Nebenwinkel** ergeben zusammen  $180^\circ$ :  $\alpha + \gamma = 180^\circ$



**Wechselwinkel** an parallelen Geraden sind gleich groß:  $\alpha = \rho$  oder  $\gamma = \delta$  oder  $\beta = \epsilon$

**Stufenwinkel** an parallelen Geraden sind gleich groß:  $\alpha = \delta$  oder  $\gamma = \rho$



Die **Winkelsumme** der Innenwinkel ...

...jedes Dreiecks beträgt  $180^\circ$ ;  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

...jedes Vierecks beträgt  $360^\circ$ ;  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

...jedes n-Ecks beträgt  $(n-2) \cdot 180^\circ$  ( $n > 2$ )

Winkel (III)

Gesetze

GEOMETRIE

delta7  
Seite 38

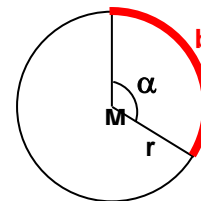
delta7  
Seite 42

delta7  
Seite 46 / 52

Der Wert des Quotienten aus Bogen- und Radiuslänge

$\frac{b}{r}$  eignet sich als Winkelmaß,  $\frac{b}{r}$  ist eine reelle Zahl.

Statt den Winkel  $a$  in Grad anzugeben, kann man die Maßzahl der zugehörigen Bogenlänge am Einheitskreis ( $r = 1$  LE) verwenden.

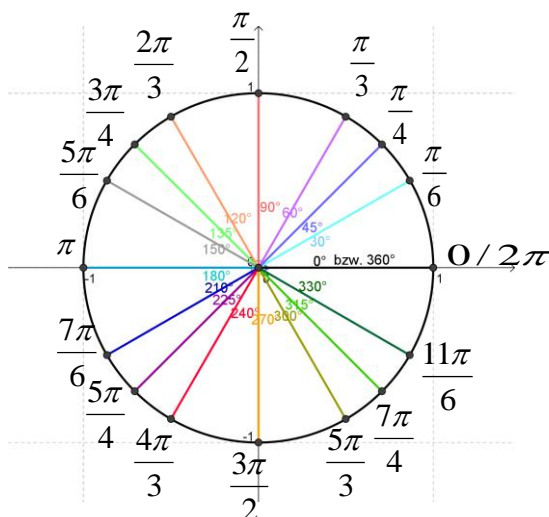


Dieses Winkelmaß heißt **Bogenmaß**,

Umrechnung:  $\frac{\pi \alpha}{180^\circ}$

Tabelle:

$0^\circ$	$0 \pi$	0
$30^\circ$	$1/6 \pi$	0,5236
$45^\circ$	$1/4 \pi$	0,7854
$60^\circ$	$1/3 \pi$	1,0472
$90^\circ$	$1/2 \pi$	1,5708
$120^\circ$	$2/3 \pi$	2,0944
$135^\circ$	$3/4 \pi$	2,3562
$150^\circ$	$5/6 \pi$	2,618
$180^\circ$	$\pi$	3,1416
$210^\circ$	$1 1/6 \pi$	3,6652
$225^\circ$	$1 1/4 \pi$	3,927
$240^\circ$	$1 1/3 \pi$	4,1888
$270^\circ$	$1 1/2 \pi$	4,7124
$300^\circ$	$1 2/3 \pi$	5,236
$315^\circ$	$1 3/4 \pi$	5,4978
$330^\circ$	$1 5/6 \pi$	5,7596
$360^\circ$	$2 \pi$	6,2832



GEOMETRIE

delta10  
Seite 10 ff

Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen; die Faltkante heißt dann **Symmetrieachse**.

Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.

$$\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$$

$$r = r^*$$

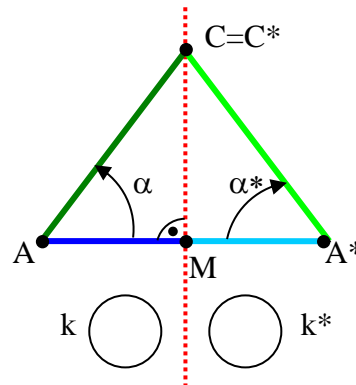
Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

$$\overline{AM} = \overline{MA^*}$$



Achsen-symmetrie

GEOMETRIE

delta5  
Seite 92

delta7  
Seite 10 ff

Wenn eine Figur bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z (**Symmetriezentrum**) mit sich zur Deckung kommt, so heißt diese Figur **punktsymmetrisch**.

Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und zueinander parallel.

$$\overline{PR} = \overline{P^*R^*}$$

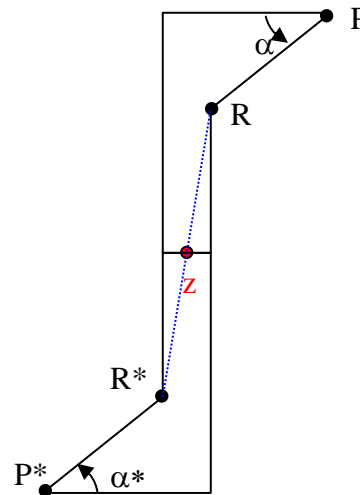
$$PR \parallel P^*R^*$$

Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß und haben gleichen Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.

$$\overline{ZR} = \overline{ZR^*}$$

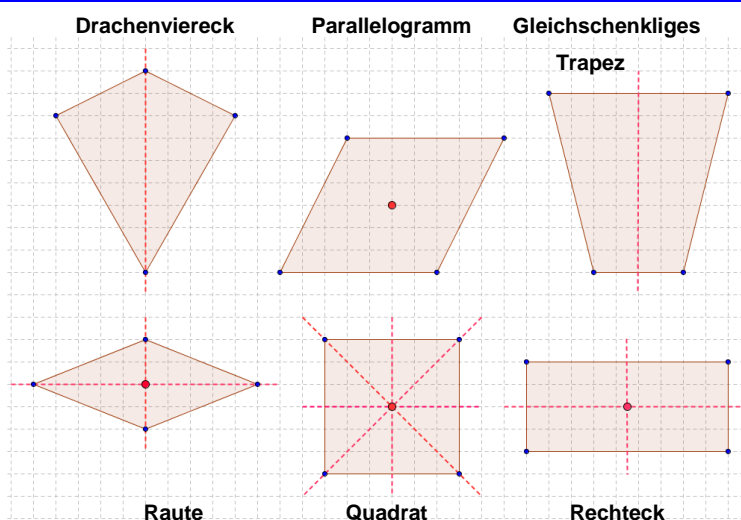


Punkt-symmetrie

GEOMETRIE

delta5  
Seite 92

delta7  
Seite 24 ff



Symmetrische Vierecke

GEOMETRIE

delta5  
Seite 72

delta7  
Seite 28 ff

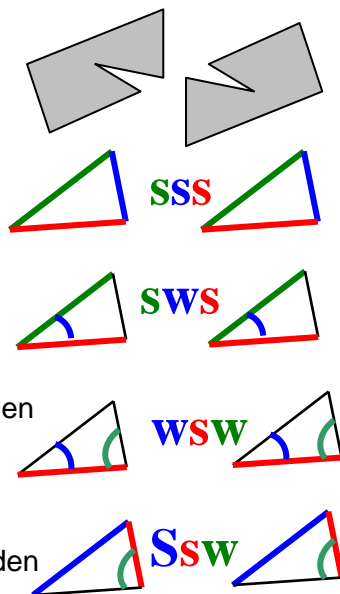


Lassen sich zwei Figuren vollständig miteinander zur Deckung bringen, so heißen sie **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent**.

**Kongruenzsätze für Dreiecke**

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie...

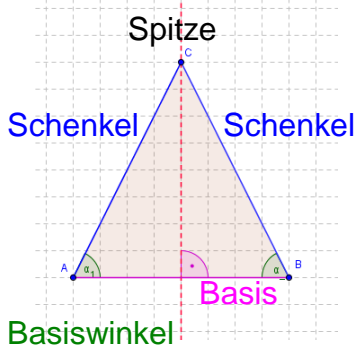
- ✓ in den Längen der drei Seiten übereinstimmen (**sss-Satz**).
- ✓ in den Längen von zwei Seiten und in der Größe von deren Zwischenwinkel übereinstimmen (**sws-Satz**).
- ✓ in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen (**wsw-Satz**).
- ✓ in den Längen zweier Seiten und in der Größe des der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels übereinstimmen (**SsW-Satz**).



Kongruenz

GEOMETRIE

delta7  
Seite 148 ff



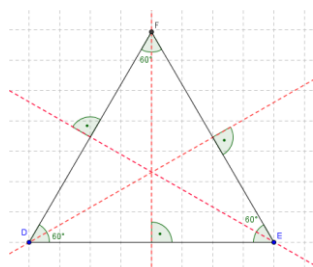
Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen **gleichschenkelig**.

**Eigenschaften:**

- ✓ Zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel).
- ✓ Die der Basis anliegenden Winkel (Basiswinkel) sind gleich groß.
- ✓ Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze und halbiert die Basis rechtwinklig.

Besondere Dreiecke

delta7  
Seite 160 ff

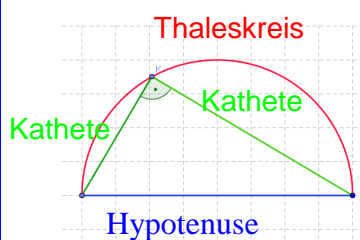


**Gleichseitige** Dreiecke haben drei gleich lange Seiten.

**Eigenschaften:**

- ✓ Alle Innenwinkel messen 60°.
- ✓ Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen; sie halbieren die Innenwinkel und halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig.

GEOMETRIE



Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, heißen **rechtwinklig**.

**Eigenschaften:**

- ✓ Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser (**Thaleskreis**).
- ✓ Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite [AB] als Durchmesser liegt, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig und C der Scheitel des rechten Winkels.

delta7  
Seite 166 ff

Ein alter und berühmter Satz aus der Geometrie zeigt die Beziehung zwischen der Länge der Hypotenuse und den Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck:

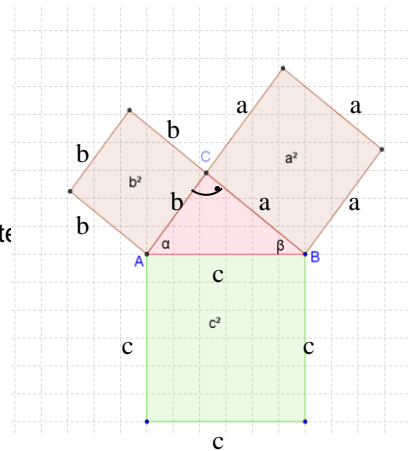
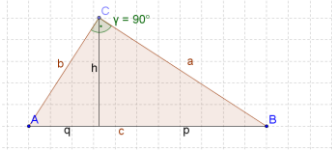
**Satz des Pythagoras:**  $c^2 = a^2 + b^2$

In Worten :

In einem rechtwinkligen Dreieck haben die beiden Quadrate über den beiden Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse!

**Kathetensatz :**  $a^2 = c \cdot p$  und  $b^2 = c \cdot q$

**Höhensatz :**  $h^2 = q \cdot p$



**Satz des Pythagoras – Kehrsatz:**

Gilt für die Längen a, b und c in einem Dreieck die Gleichung  $c^2 = a^2 + b^2$ , so ist das Dreieck rechtwinklig.

**Satz von Pythagoras**  
**Höhensatz**  
**Kathetensatz**  
**GEOMETRIE**

delta9  
Seite 29 ff

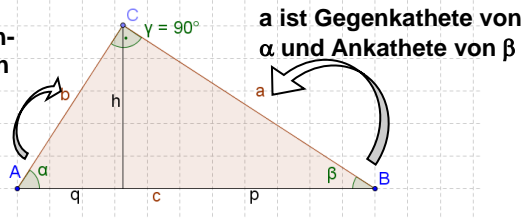
**Tangens eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}$

**Sinus eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

**Kosinus eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{a}{b} & \tan \beta &= \frac{b}{a} \\ \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \sin \beta &= \frac{b}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \beta &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

b ist Gegenkathete von  $\beta$  und Ankathete von  $\alpha$



**Tangens... Sinus... Kosinus...**  
**...eines Winkels**

**GEOMETRIE**

delta9  
Seite 125 ff

**Es gilt:**  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  und  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

**Außerdem:**  $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$  und  $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

$\varphi$	$0^\circ$ oder $360^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \varphi$	$0 = 1/2 \sqrt{0}$	$1/2 = 1/2 \sqrt{1}$	$1/2 \sqrt{2}$	$1/2 \sqrt{3}$	$1 = 1/2 \sqrt{4}$
$\cos \varphi$	1	$1/2 \sqrt{3}$	$1/2 \sqrt{2}$	1	0
$\tan \varphi$	0	$1/3 \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$\varphi$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$
$\sin \varphi$	$1/2 \sqrt{2}$	0	$-1/2 \sqrt{2}$	-1	$-1/2 \sqrt{2}$
$\cos \varphi$	$-1/2 \sqrt{2}$	-1	$-1/2 \sqrt{2}$	0	$1/2 \sqrt{2}$
$\tan \varphi$	-1	0	1	-	-1

**tan, sin, cos**  
**Beziehungen**

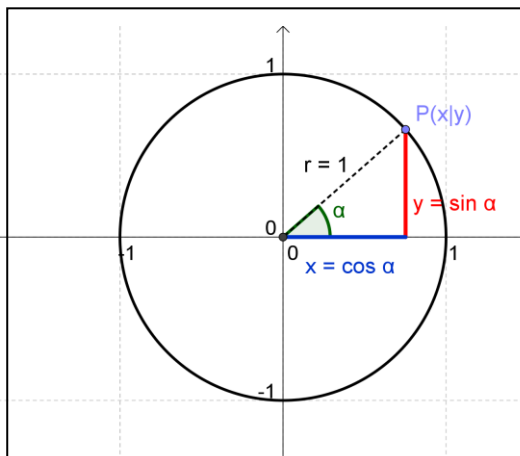
**Besondere Winkel**

delta9  
Seite 134 ff

delta10  
Seite 38 ff

Am Einheitskreis kann man die Werte von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  für beliebig große Winkel definieren:

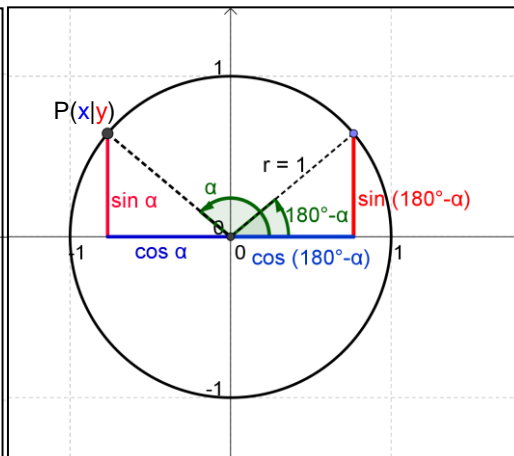
**I. Quadrant**, es gilt  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



$$x = \cos \alpha = \frac{x}{r} = x$$

$$y = \sin \alpha = \frac{y}{r} = y$$

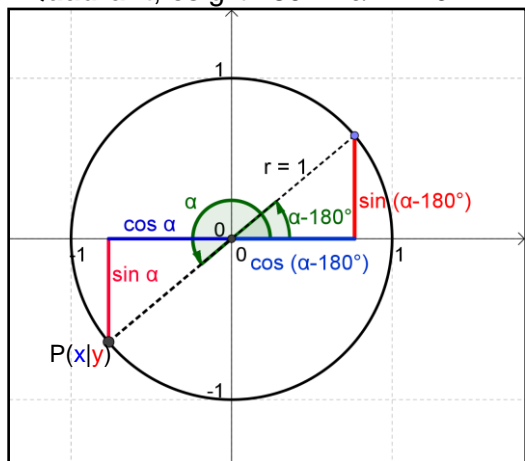
**II. Quadrant**, es gilt  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



$$x = \cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$$

$$y = \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

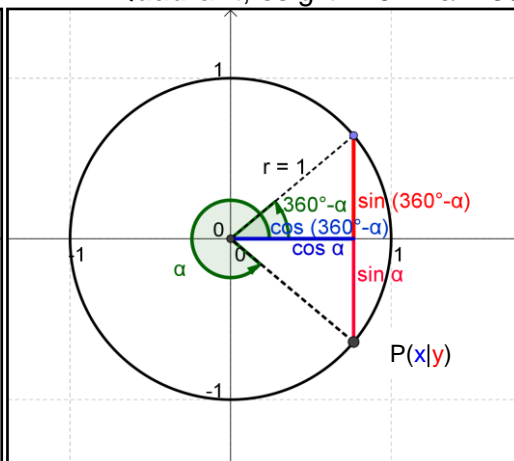
**III. Quadrant**, es gilt  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$



$$x = \cos \alpha = -\cos (\alpha - 180^\circ)$$

$$y = \sin \alpha = -\sin (\alpha - 180^\circ)$$

**IV. Quadrant**, es gilt  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$



$$x = \cos \alpha = \cos (360^\circ - \alpha)$$

$$y = \sin \alpha = -\sin (360^\circ - \alpha)$$

Für negative Winkel gilt:

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

Für Drehungen über  $360^\circ$  gilt:

$$\sin (\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos (\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{N})$$

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

GEOMETRIE

delta10  
Seite 38 ff

Wird eine Originalfigur im Maßstab  $a$  ( $a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ ) vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur und die Originalfigur zueinander **ähnlich**. Der Maßstab  $a$  heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.

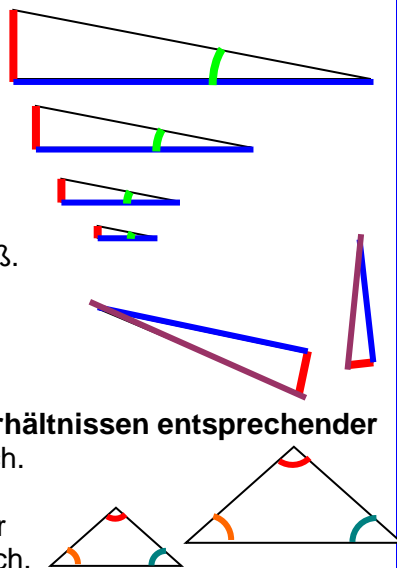
Für zueinander ähnliche Figuren gilt:

- Einander entsprechende **Winkel** sind stets gleich groß.
- Längenverhältnisse **einander entsprechender** Strecken sind stets gleich.

**Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in allen **Längenverhältnissen entsprechender Seiten** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in den Größen aller **Winkel** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.



Ähnlichkeit

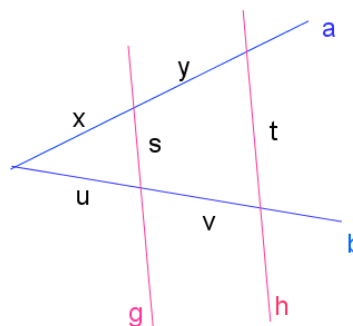
GEOMETRIE

delta8  
Seite 160 ff

**1. Strahlensatz**

Wenn zwei Halbgeraden bzw. zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen irgendwelcher zwei Abschnitte auf der einen (Halb-) Geraden ebenso wie die Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der anderen (Halb-) Geraden.

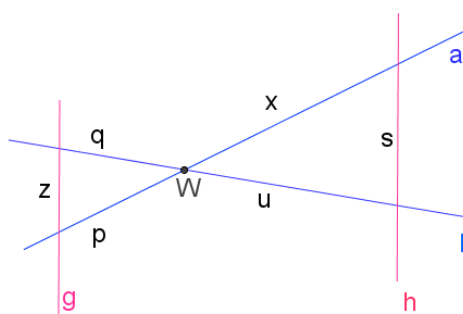
Beispiel:  $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$  oder  $\frac{x}{p} = \frac{u}{q}$



**2. Strahlensatz**

Wenn zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen der Parallelstrecken wie die Längen der vom Punkt W bis zu ihnen hin verlaufenden Abschnitte auf der einen Geraden:

Beispiel:  $\frac{s}{t} = \frac{u}{u+v}$  oder  $\frac{s}{z} = \frac{x}{p}$



Strahlensätze

GEOMETRIE

delta8  
Seite 145 ff

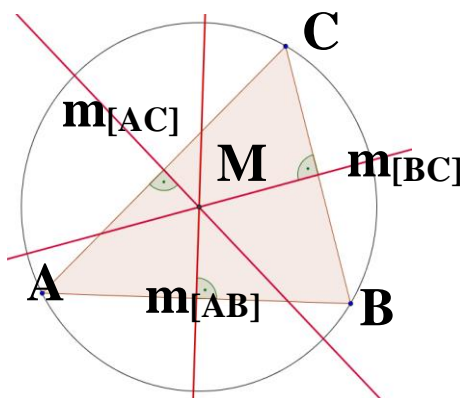
Es gilt auch der **Kehrsatz des 1. Strahlensatzes**:

Werden zwei Geraden a und b, die einander im Punkt W schneiden von zwei Geraden g und h so geschnitten, dass das Verhältnis der Längen irgendwelcher zweier Abschnitte auf der Geraden a stets gleich dem Verhältnis der Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der Geraden b ist, dann sind die beiden Geraden g und h zueinander parallel.

Der **Kehrsatz des 2. Strahlensatzes** gilt nicht.

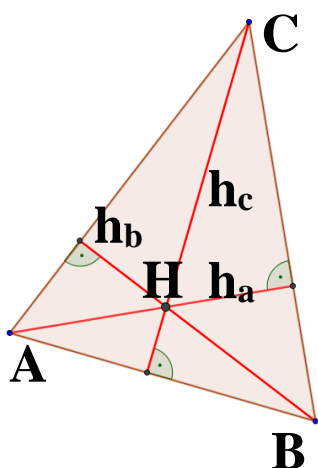
Alle Punkte (der Zeichenebene), die von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** (dem **Mittellot**)  $m_{[AB]}$  ihrer Verbindungsstrecke.

Die drei Mittelsenkrechten  $m_{[AB]}$ ,  $m_{[BC]}$  und  $m_{[CA]}$  eines Dreiecks ABC schneiden einander stets in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des **Umkreises** dieses Dreiecks. Die Punkte A, B und C sind von M gleich weit entfernt.



**Besondere Linien im Dreieck**

delta7  
Seite 180



Eine Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet, heißt **Höhe** dieses Dreiecks.

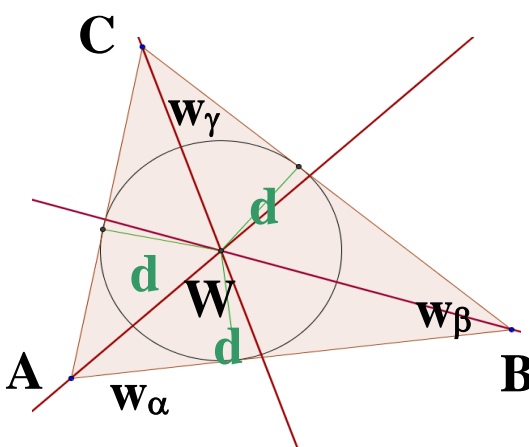
Jedes Dreieck besitzt somit drei Höhen  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$ ; sie schneiden einander in einem Punkt H.

**GEOMETRIE**

delta7  
Seite 184

Eine Gerade, die einen Dreiecksinnenwinkel halbiert, heißt **Winkelhalbierende** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Winkelhalbierende  $w_\alpha$ ,  $w_\beta$  und  $w_\gamma$ ; sie schneiden einander in einem Punkt W, der von den drei Seiten den gleichen Abstand d besitzt. W ist der Mittelpunkt des **Innkreises**.



delta7

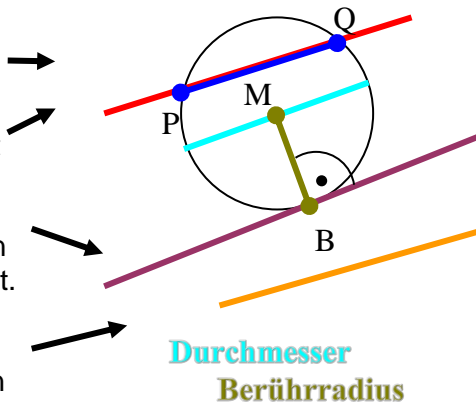
Seite 188

Eine Gerade heißt **Sekante** eines Kreises, wenn sie diesen Kreis in zwei Punkten schneidet.

Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt **Sehne** ([PQ]).

Eine Gerade heißt **Tangente** eines Kreises, wenn sie mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat. Dieser Punkt heißt **Berührungspunkt (B)**.

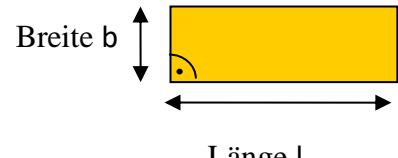
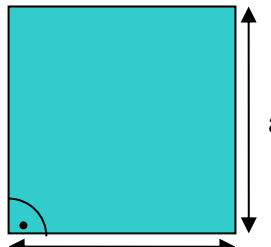
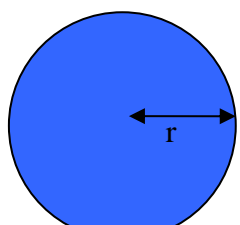
Eine Gerade heißt **Passante** eines Kreises, wenn sie mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat.



**Kreis und Gerade**

**GEOMETRIE**

delta7  
Seite 170 ff

<p><b>Rechteck</b></p>  <p>Breite <math>b</math></p> <p>Länge <math>l</math></p>	<p><b>Quadrat</b></p>  <p>Seitenlänge <math>a</math></p>	<p><b>Kreis</b></p>  <p>Radiuslänge <math>r</math></p>
<p><b>Umfangslänge:</b></p> <p><math>U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot l + 2 \cdot b</math>  <math>= 2 \cdot (l + b)</math></p> <p><math>U_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot a</math></p> <p><math>U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot r \cdot \pi</math></p>		
<p><i>Im Beispiel:</i></p> <p><math>U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot 1 \text{ cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} = \underline{8 \text{ cm}}</math></p> <p><math>U_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot 3 \text{ cm} = \underline{12 \text{ cm}}</math></p> <p><math>U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot 1,5 \text{ cm} \cdot \pi \approx \underline{9,42 \text{ cm}}</math></p>		
<p><b>Flächeninhalt:</b></p> <p><math>A_{\text{Rechteck}} = l \cdot b</math>                  („Länge mal Breite“)</p> <p><math>A_{\text{Quadrat}} = a \cdot a = a^2</math></p> <p><math>A_{\text{Kreis}} = r^2 \cdot \pi</math></p>		
<p><i>Im Beispiel:</i></p> <p><math>A_{\text{Rechteck}} = 1 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = \underline{3 \text{ cm}^2}</math></p> <p><math>A_{\text{Quadrat}} = 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = \underline{9 \text{ cm}^2}</math></p> <p><math>A_{\text{Kreis}} = (1,5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \approx \underline{7,07 \text{ cm}^2}</math></p>		

**Umfangslänge  
Flächeninhalt**

**GEOMETRIE**

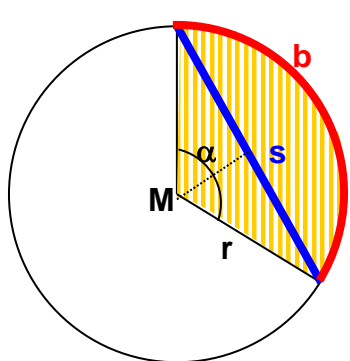
delta5  
Seite 158

delta8  
Seite 14 ff

delta5  
Seite 182

delta8  
Seite 38 ff

<b>Kreisbogen</b>	Radiuslänge $r$	Mittelpunkt $M$	$\alpha$ : Mittelpunktswinkel
<b>Bogenlänge</b>	$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ}$		
<b>Sehne</b>	$\frac{s}{2r} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ <p>(Herleitung über rechtwinkliges Dreieck)</p>		
<b>Kreisektor</b>	$A_{\text{Sektor}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$		

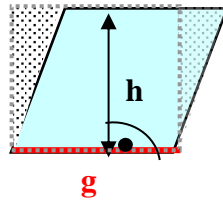


**Umfangslänge  
Flächeninhalt**

**Kreisteile**

**GEOMETRIE**

delta10  
Seite 16 ff

<p><b>Parallelogramm:</b>                  Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel.</p> <p>Seitenlänge <math>g</math> („Grundseite“) – zugehörige Höhe <math>h</math></p> <p><math>A_{\text{Parallelogramm}} = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2</math></p> <p><math>U_{\text{Parallelogramm}} = 2g_1 + 2g_2 = 2(g_1 + g_2)</math></p>	
--	--

**Umfangslänge  
Flächeninhalt**

**Parallelogramm**

**GEOMETRIE**

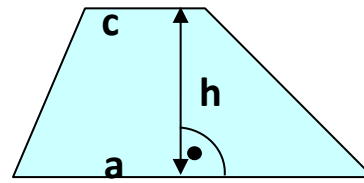
delta6  
Seite 130

**Trapez:**

Zwei gegenüberliegende Seiten („Grundseiten“) sind parallel (hier a und c).

Höhe h: Abstand der parallelen Grundseiten

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h$$



Umfangslänge  
Flächeninhalt  
Trapez

GEOMETRIE

delta6  
Seite 138

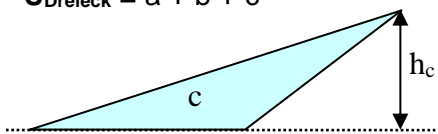
**Dreieck:**

Drei Ecken – drei Seiten („Grundseiten“) – drei Innenwinkel.

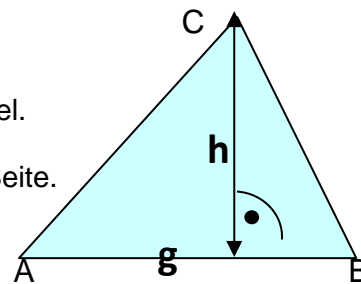
Höhe h: Abstand der Ecke von der gegenüberliegenden Seite.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$U_{\text{Dreieck}} = a + b + c$$



Bei manchen Dreiecken kann die Höhe auch außerhalb des Dreiecks liegen.



Umfangslänge  
Flächeninhalt  
Dreieck

GEOMETRIE

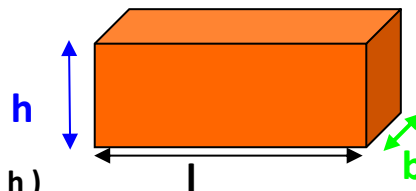
delta6  
Seite 136

**Quader:**

Länge **l** , Breite **b** , Höhe **h**

Volumen:  $V_{\text{Quader}} = l \cdot b \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Quader}} = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

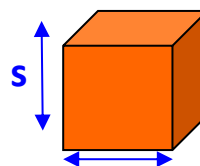


**Würfel:**

Kantenlänge **s**

Volumen:  $V_{\text{Würfel}} = s \cdot s \cdot s = s^3$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Würfel}} = 6 \cdot s^2$



Volumen  
und Ober-  
flächeninhalt (l)

Quader

GEOMETRIE

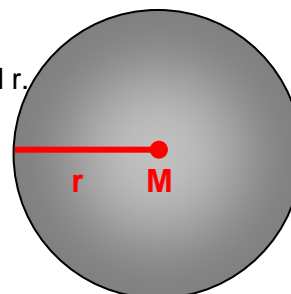
delta6  
Seite 146/152/160

**Kugel** mit der Radiuslänge **r** und dem Mittelpunkt **M**:

Alle Punkte auf der Kugel haben zum Mittelpunkt den Abstand r.

Volumen:  $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

Oberflächeninhalt:  $A = 4r^2 \pi$



Volumen  
und Ober-  
flächeninhalt (VI)

Kugel

GEOMETRIE

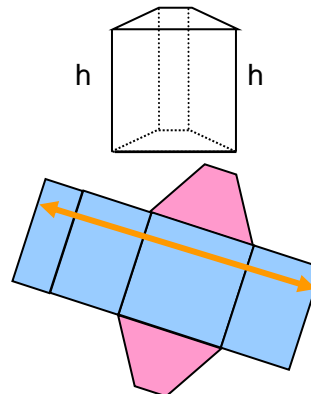
delta10  
Seite 24 ff

**Gerades Prisma:** Grundfläche und Deckfläche sind kongruente n-Ecke und zueinander parallel.

**Mantel:** Alle Seitenflächen (Rechtecke) zusammen.

Volumen:  $V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$   
 (U: Umfangslänge)



Volumen und Oberflächeninhalt (II)

Gerades Prisma

GEOMETRIE

delta9  
Seite 166 f

**Gerader Kreiszylinder:** Grundfläche und Deckfläche sind kongruente Kreise und zueinander parallel.

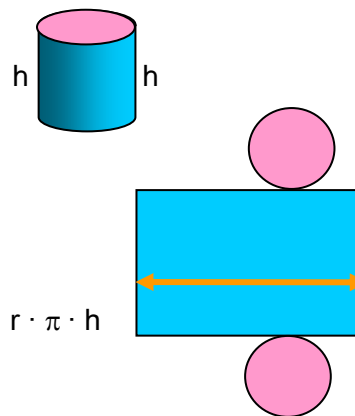
$G = r^2 \cdot \pi$

**Mantel:** Seitenfläche (Rechteck)

$M = U \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$  (U: Umfangslänge)

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen:  $V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Volumen und Oberflächeninhalt (III)

Gerader Kreiszylinder

GEOMETRIE

delta9  
Seite 174 ff

**Pyramide:** Grundfläche: Ein n-Eck (n>2)

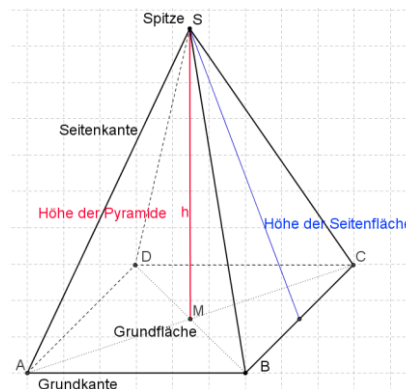
Seitenflächen: n Dreiecke

**Mantel:** Alle Seitenflächen (Dreiecke) zusammen.

**Gerade Pyramide:** Alle Seitenkanten gleich lang.

Volumen:  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Pyramide}} = G + M$



Volumen und Oberflächeninhalt (IV)

Pyramide

GEOMETRIE

delta9  
Seite 178 ff

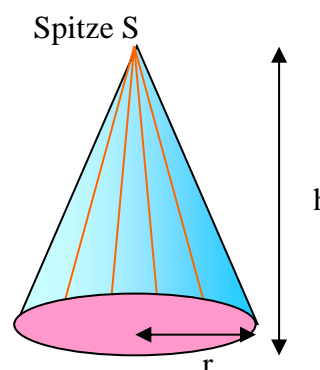
**Gerader Kreiskegel:** Grundfläche: Kreis  $G = r^2\pi$

Mantel: Kreissektor  $M = r\pi s$

(s: Länge der Mantellinien)

Volumen:  $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Kegel}} = G + M = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$



Volumen und Oberflächeninhalt (V)

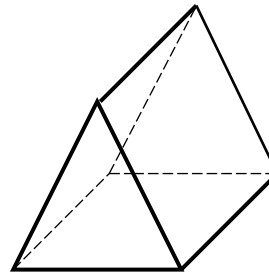
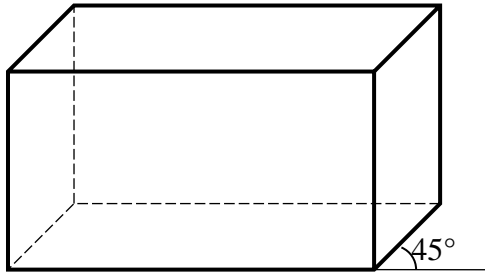
Gerader Kreiskegel

GEOMETRIE

delta9  
Seite 188 ff



Schrägbild



In einem **Schrägbild** wird ein Körper so gezeichnet, dass man ihn sich räumlich gut vorstellen kann.

Die „nach hinten“ verlaufenden Quaderkanten werden schräg und verkürzt, aber zueinander parallel gezeichnet. Häufig trägt man sie unter einem Winkel von 45° und in halber Länge an.

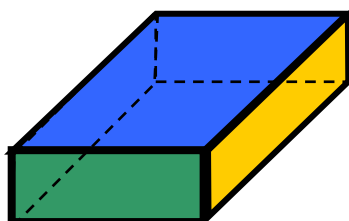
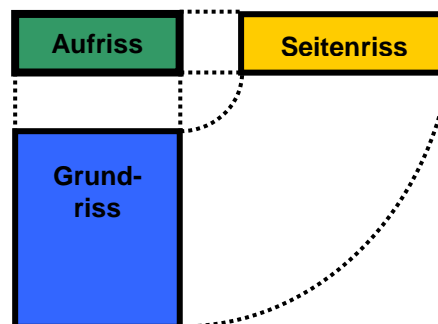
**Unsichtbare Kanten** werden gestrichelt eingezeichnet.

Um eine räumliche Vorstellung von einem Körper zu erhalten, stellt man ihn häufig aus mehreren verschiedenen Richtungen betrachtet dar:

Der **Grundriss** zeigt, wie der Körper (senkrecht) von oben betrachtet aussieht.

Der **Aufriss** zeigt, wie der Körper von vorne betrachtet aussieht.

Ein **Seitenriss** zeigt, wie der Körper von rechts (oder von links) betrachtet aussieht.



GEOMETRIE

delta6  
Seite 148/150

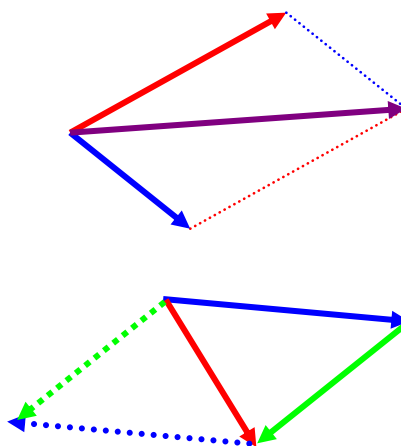
delta9  
Seite 164 f

Die Addition bzw. Subtraktion zweier Vektoren ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \text{ Dann gilt:}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

Lambacher Schweizer 11 Seite 90 ff

Für den Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und die reelle Zahl  $r$  gilt:  $r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Beispiel:  $r=2$ ,  $r=0,5$  und  $r=-2$  und  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , dann



$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 0,5 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ und } -2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation)

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

Lambacher Schweizer 11 Seite 100 ff

Den Ausdruck  $k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + k_n \cdot \vec{a}_n$  nennt man **Linearkombination** der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$  und  $\vec{a}_n$ .

Die reellen Zahlen  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  nennt man **Koeffizienten**.

Beispiel:  $2 \cdot \vec{u} - 8 \cdot \vec{v} + 3 \cdot \vec{w}$  ist eine Linearkombination von  $\vec{u}, \vec{v}$  und  $\vec{w}$

Die Länge eines Repräsentanten des Vektors  $\vec{u}$  bezeichnet man als Betrag von  $\vec{u}$ ,

kurz:  $|\vec{u}|$ . Mit „Pythagoras“ gilt:  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Beispiel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  hat den Betrag  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

Linear-kombination

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

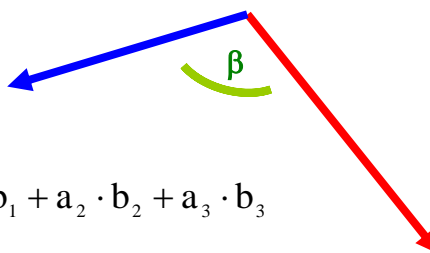
Lambacher Schweizer 11 Seite 101 ff

Betrag

Lambacher Schweizer 11 Seite 104 ff

**Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \beta$$



**Koordinatenform:**

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

**Winkel β:**

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

**Es gilt:**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

**Beispiel:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{14} \quad \text{und} \quad |\vec{b}| = \sqrt{52}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{52}} = \frac{-16}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{52}} \approx -0,593 \Rightarrow \beta \approx 126,37^\circ$$

**Skalarprodukt**

**Winkel zwischen zwei Vektoren**

**KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM**

Lambacher Schweizer 11 Seite 106 ff

Für das **Vektorprodukt**

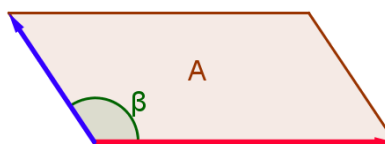
zweier Vektoren gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel (s.o.):**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - (-3) \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  und  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ .



Spannen die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ein

Parallelogramm auf, so gilt für die Fläche

$$A_{p.} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \beta$$

**Beispiel (s.o.):**

$$A = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + (-18)^2} = \sqrt{472} \approx 21,7$$

bzw.  $A = \sqrt{14} \cdot \sqrt{52} \cdot \sin 126,37^\circ \approx 21,7$

**Vektorprodukt**

**Parallelogramm-fläche**

**KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM**

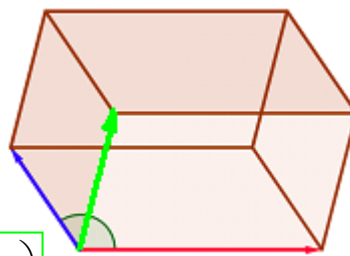
Lambacher Schweizer 11 Seite 111 ff

Spannen die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  ein **Spat** auf, so gilt für das Volumen

$$V = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$$

**Beispiel (s.o.):**  $V = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



$$= \left| \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = |-12 + (-4) + 54| = |38| = 38$$

Spatvolumen

KOORDINATEN-  
GEOMETRIE  
IM RAUM

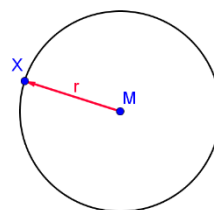
Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 111 ff

Gleichung in **Vektordarstellung**:  $(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$

Gleichung in **Koordinatendarstellung**:

Kreis:  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

Kugel:  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$



**Beispiele:** M(0 | 5 | -3) und r = 5 ergeben die folgende Kugelgleichung:

$$(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - (-3))^2 = 5^2$$

$$x_1^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 3)^2 = 5^2$$

M(1 | 7) und r = 3 ergeben die folgende Kreisgleichung:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 = 3^2$$

Kreis- und  
Kugelgleichung

KOORDINATEN-  
GEOMETRIE  
IM RAUM

Lambacher  
Schweizer 11  
Seite 115 ff

**Geradengleichung:**  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r}$

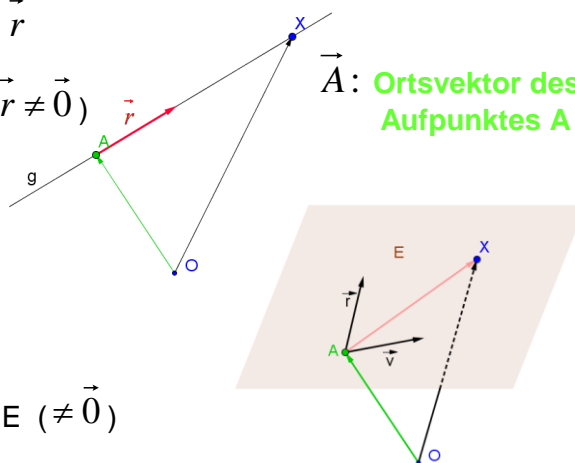
$\vec{r}$ : Richtungsvektor der Geraden g ( $\vec{r} \neq \vec{0}$ )

$\vec{A}$ : Ortsvektor des  
Aufpunktes A

**Ebenengleichung: (Parameterform)**

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{v}$$

$\vec{r}, \vec{v}$ : Richtungsvektoren der Ebene E ( $\neq \vec{0}$ )



Geraden- und  
Ebenen-  
gleichungen

KOORDINATEN-  
GEOMETRIE  
IM RAUM

**\*NEU\***

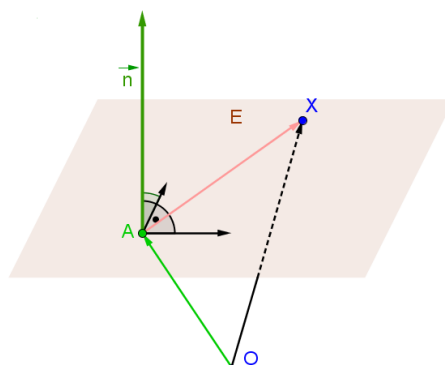
Lambacher  
Schweizer 12  
Seite 121 ff

Seite 128 ff

**Normalenform** einer Ebene

**(Vektordarstellung):**  $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{v}$  ist ein Normalenvektor der Ebene.



**Normalenform** einer Ebene

**(Koordinatendarstellung):**

$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

wobei  $n_0 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$

**Hesse'sche Normalenform** einer Ebene **(Koordinatendarstellung):**

$E_{HNF}: \pm \frac{1}{|\vec{n}|} (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$  (Vorzeichen so wählen, dass vor  $n_0$  ein Minus steht...)

**Normalenform von Ebenen**

**KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM**

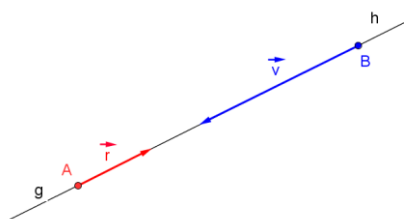
**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 131 ff

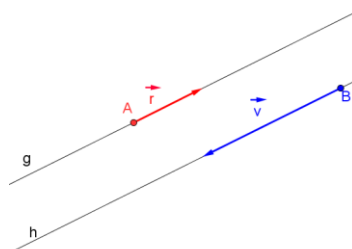
Für  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r}$  und  $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$  gilt:

a) Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  sind linear abhängig:

$g = h$ , wenn B auf g liegt.



$g \parallel h$ , wenn B nicht auf g liegt.



b) Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  sind linear **unabhängig**:

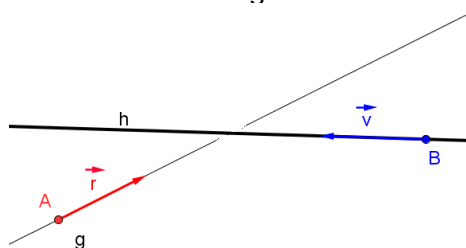
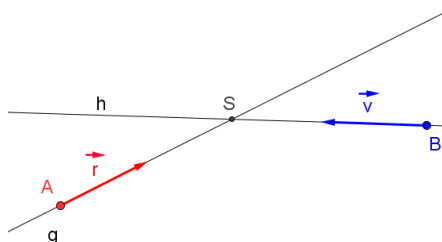
g und h **schneiden sich** im Punkt S,

g und h sind **windschief**,

wenn  $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{r} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$

genau eine Lösung hat.

keine Lösung hat.



**Gegenseitige Lage von Geraden**

**KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM**

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 125 ff

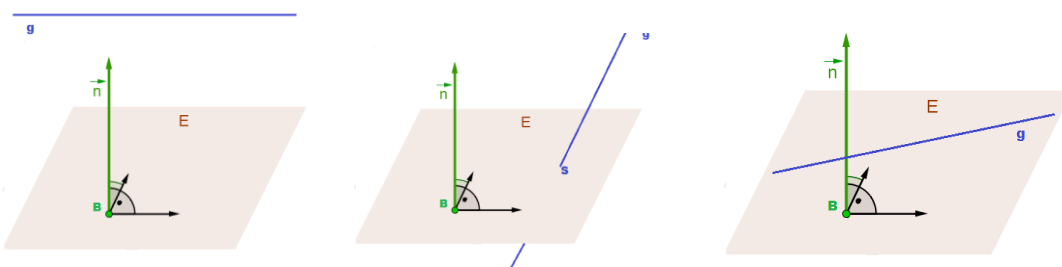
Gegeben sind:  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r}$  und  $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$

Man setzt g in die Ebenengleichung E ein:  $\vec{n} \circ (\vec{A} + \lambda \cdot \vec{r} - \vec{B}) = 0$

Es ist  $g \parallel E$ , wenn keine Lösung existiert.

g schneidet E im Punkt S, wenn genau eine Lösung existiert.

g liegt in E, wenn unendlich viele Lösungen existieren.



Beispiele:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 15 = 0$$

Einsetzen:  $2(2-3\lambda) + (\lambda) - 4(1-5\lambda) + 15 = 0$

$$4 - 6\lambda + \lambda - 4 + 20\lambda + 15 = 0 \Rightarrow 15\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Somit: g schneidet E im Punkt S(5 | -1 | 6)

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 15 = 0$$

Einsetzen:  $2(3-\lambda) + (-2+2\lambda) - 4(7) + 15 = 0$

$$6 - 2\lambda - 2 + 2\lambda - 28 + 15 = 0 \Rightarrow -9 = 0 \Rightarrow \text{Keine Lösung, bzw. } h \parallel E$$

Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

\*NEU\*

Lambacher Schweizer 12 Seite 133 ff

Gegeben sind:  $E: \vec{n}_1 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$  und  $F: \vec{n}_2 \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$

E und F schneiden sich in einer Geraden, wenn  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  linear unabhängig sind.

Sind  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  linear abhängig, dann gilt...

- a)  $E = F$ , wenn der Aufpunkt von E auch in F liegt.
- b)  $E \parallel F$ , wenn der Aufpunkt von E nicht in F liegt.

Beispiel:

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6 = 0 \quad (I)$$

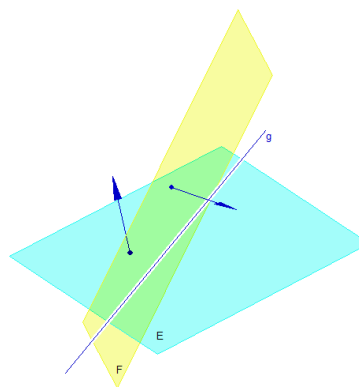
$$F: x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \quad (II)$$

$$(I)+(II) \quad 3x_1 + 6 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = -2$$

$$\text{In (II)} \quad -2 - x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = -2 + 2x_3$$

Z.B.  $x_3$  frei wählbar:  $x_3 = \lambda$  Somit  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Schnittgerade)



Gegenseitige Lage zweier Ebenen

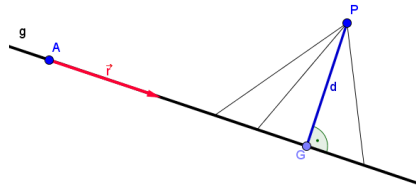
KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

\*NEU\*

Lambacher Schweizer 12 Seite 137 ff

Gegeben sind:  $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r}$  und der Punkt  $P(p_1 | p_2 | p_3)$ .

Für welchen Geradenpunkt G gilt  $\vec{PG} \perp \vec{r}$  ?



**Beispiel**  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $P(1|4|3)$

$G(-2 | -2 + 2\lambda | \lambda)$  Nun:  $\begin{pmatrix} -2-1 \\ -2+2\lambda-4 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$0 + (2\lambda - 6) \cdot 2 + (\lambda - 3) \cdot 1 = 0$  bzw.  $5\lambda - 15 = 0$  bzw.  $\lambda = 3$

Somit ist  $G(-2 | 4 | 3)$  und es gilt  $d(P; g) = \overline{PG} = \sqrt{(-3)^2 + 0 + 0} = 3$

Abstand vom Punkt P zur Geraden g

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 140 ff

Gegeben sind:  $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$  und der Punkt  $P(p_1 | p_2 | p_3)$ .

P in  $E_{\text{HNF}}$  einsetzen:  $d(P; E) = \frac{1}{|\vec{n}|} (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_0)$

**Beispiel:**  $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$  und  $P(1 | 4 | 7)$

$|\vec{n}| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = 3$ , somit  $E_{\text{HNF}}: \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2) = 0$

$d(P; E) = \left| \frac{1}{3}(2 + 4 - 14 + 2) \right| = 2$

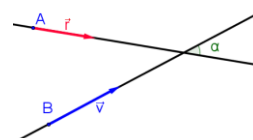
Abstand vom Punkt P zur Ebene E

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

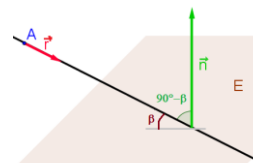
**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 140 ff

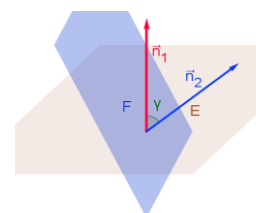
Schnittwinkel zwischen zwei Geraden:  $\cos \alpha = \frac{|\vec{r} \circ \vec{v}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$



Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene:  $\sin \beta = \frac{|\vec{r} \circ \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$



Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:  $\cos \gamma = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$



Schnittwinkel

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

**\*NEU\***

Lambacher Schweizer 12 Seite 146 ff