Gleichungen – Grundbegriffe

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die miteinander durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. — $x + 3 = 2x - 7$

Setzt man für die **Variable** eine Zahl in die Gleichung ein, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben. — $4 + 3 = 2 \cdot 4 - 7$; $7 = 1$ falsch

Die (vorgegebene) Menge aller Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**. — $G = \mathbb{N}$

Die Zahlen der Grundmenge G, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage liefern, heißen **Lösungen** dieser Gleichung. — $10 + 3 = 2 \cdot 10 - 7$; $13 = 13$

Die Lösungen einer Gleichung fasst man zur **Lösungsmenge $\mathbb{L}$** dieser Gleichung zusammen. — $\mathbb{L} = \{10\}$

Wenn kein Element der Grundmenge G beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, dann ist die Lösungsmenge die **leere Menge**, geschrieben { } (oder Ø). — $G = \{1; 2; 3\}$; $x + 3 = 2x - 7$; $\mathbb{L} = \{\ \}$

delta7
Seite 104-105

Lösen von Gleichungen (I)

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Äquivalenzumformungen sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man — $3x + 1 = 7$

- ✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert. — $3x + 1 = 7 \quad | +3$; $3x + 4 = 10$
- ✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert. — $3x + 4 = 10 \quad | -4$; $3x = 6$
- ✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**. — $3x = 6 \quad | \cdot 2$; $6x = 12$
- ✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**. — $6x = 12 \quad | :6$; $x = 2$

Beispiele:

a) Grundmenge: $G = \mathbb{N}$
Gleichung: $x + 12 = 4 \quad | -12$
Neue Gleichung: $x = -8$
Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\ \}$ weil $-8 \notin \mathbb{N}$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

b) $G = \mathbb{Z}$
$4x - 3 = 25 \quad | +3$
$4x = 28 \quad | :4$
$x = 7 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{ 7 \}$

c) $G = \mathbb{Q}$
$7x + 4 = 3 - x \quad | +x$
$8x + 4 = 3 \quad | -4$
$8x = -1 \quad | :8$
$x = -0{,}125$
$\mathbb{L} = \{ -0{,}125 \}$

ACHTUNG: Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen!

d) $-4x < 24 \quad | :(-4)$
$x > -6$
$\mathbb{L} = \{ x \mid x > 6 \}$ **Mengenschreibweise**
$=]\, 6 ; +\infty \,[$ **Intervallschreibweise**

e) $-x \geq -31 \quad | \cdot(-1)$
$x \leq 31$
$\mathbb{L} = \{ x \mid x \leq 31 \}$
$=]\, -\infty ; 31 \,]$

delta7
Seite 106-119

delta8
Seite 62-65

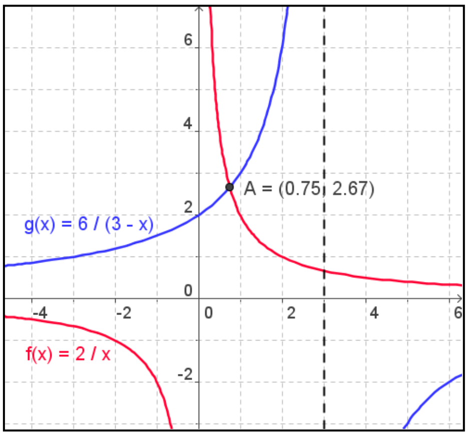
Lösen von Gleichungen (II)

Bruchgleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable in mindestens einem der Nenner auftritt nennt man **Bruchgleichung**.

Beispiel: $\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$

Graphische Lösung:
Man zeichnet zuerst die Funktionsgraphen der beiden Gleichungsseiten.
Dann liest man die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte ab.



Im Beispiel:
Die Graphen der Funktionen

f: f(x) $= \frac{2}{x}$ und **g: g(x)** $= \frac{6}{3-x}$

haben nur den Punkt A $(0{,}75 \mid 2{,}\overline{6})$ gemeinsam, die Bruchgleichung hat also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Definitionsmenge angeben: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

Rechnerische Lösung:
Beide Seiten der Bruchgleichung mit einem gemeinsamen Nenner (am besten mit dem Hauptnenner) aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen.

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$

HN: $(3-x)\cdot x$

$$\frac{2\cdot(3-x)\cdot x}{x} = \frac{6\cdot(3-x)\cdot x}{3-x}$$

Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen.
Prüfen, ob die ermittelte Lösung zur Definitionsmenge gehört.

$$\begin{aligned} 2\cdot(3-x) &= 6\cdot x && \mid \text{TV} \\ 6-2x &= 6x && \mid +2x \\ 6 &= 8x && \mid :8 \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Probe machen: LS: $\frac{2}{0{,}75} = 2\frac{2}{3}$ RS: $\frac{6}{3-0{,}75} = \frac{6}{2{,}25} = 2\frac{2}{3}$ LS = RS ✓

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Weiteres Beispiel: $\frac{2x+2}{x-6} = \frac{4x-140}{2x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$

HN: 2x(x-6) $\frac{(2x+2)2x(x-6)}{x-6} = \frac{(4x-140)2x(x-6)}{2x}$

$$(2x+2)2x = (4x-140)(x-6)$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x &= 4x^2 - 24x - 140x + 840 && \mid -4x^2 \\ 4x &= -164x + 840 && \mid +164x \\ 168x &= 840 && \mid :168 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{5\}$.

Probe: LS = (2·5+2):(5-6) = 12:(-1) = -12 RS = (4·5-140):(2·5) = -120:10 = -12 LS = RS ✓

delta8
Seite 124-128

Lösen von Gleichungen (II) (Fortsetzung)

Wiederholung Bruchterme

Bruchterm: Die Variable tritt auch im Nennerterm des Bruchs auf. $\frac{5x+2}{x-7}$

Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur **Definitionsmenge** des Bruchterms. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Bruchterme können wie Brüche **erweitert und gekürzt** werden.

Erweitern: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden mit der gleichen Zahl (mit dem gleichen Term) multipliziert.

Beispiel:
$$\frac{4}{x} = \frac{8}{2x} = \frac{8(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{8(x+1)a}{2x(x+1)a} = \ldots$$
…mit 2 …mit (x+1) …mit a **… erweitert.**

Kürzen: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden durch die gleiche Zahl (durch den gleichen Term) dividiert.

Beispiel:
$$\frac{25x^2y(a+1)}{10x(a+1)z} = \frac{25x^2y}{10xz} = \frac{5x^2y}{2xz} = \frac{5xy}{2z}$$
…mit a+1 …mit 5 …mit x **… gekürzt.**

Beachte: Die größtmögliche Definitionsmenge kann sich beim Erweitern bzw. Kürzen eines Bruchterms ändern.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiel:
$$\frac{8x}{x+2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{8x+2-3x}{x+2} = \frac{5x+2}{x+2}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ungleichnamige Bruchterme werden vorher gleichnamig gemacht.

Beispiel:
$$\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{3(3x+1)}{3x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{9x+3+2x-1}{3x} = \frac{11x+2}{3x}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Multiplikation und Division von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert. (KÜRZEN!)

Beispiel:
$$\frac{8x}{x+2} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{8x \cdot 3}{(x+2) \cdot 4x} = \frac{2 \cdot 3}{(x+2)} = \frac{6}{x+2}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$

Ein Bruchterm wird durch einen zweiten dividiert, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrbruch des zweiten multipliziert.

Beispiel:
$$\frac{5-x}{x+1} : \frac{3x-6}{x+1} = \frac{5-x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x-6} = \frac{5-x}{3x-6}$$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

delta8
Seite 118-123

Lösen von Gleichungen (III)

Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ ;\ b, c \in \mathbb{R}$

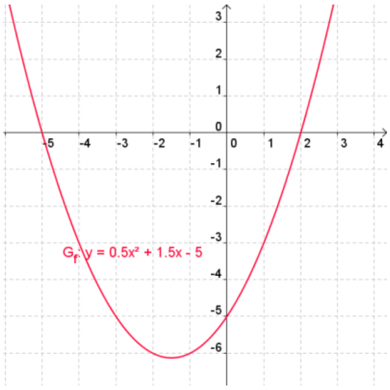
nennt man **quadratische Gleichungen**.

Graphische Lösung:

Man kann die Lösungen der Gleichung als Nullstellen des Funktionsgraphen von $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5$ deuten.

Beispiel:

$0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5 = 0$



Im Beispiel:

Der Graph der Funktion f(x) hat die beiden Nullstellen (–5|0) und (2|0) und die Gleichung somit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-5; 2\}$.

Rechnerische Lösung mit Linearfaktoren:

$(x - 3)(x + 5) = 0$ ergibt ausmultipliziert die Gleichung $x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$.
Bei der **Linearfaktorzerlegung** links kann man die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$ ablesen! Somit kann man oft Lösungen erraten:

Beispiele:

$x^2 - 12x + 20 = 0$	$x^2 - 8x = 0$	$x^2 - 49 = 0$
$(x - 10)(x - 2) = 0$	$x(x - 8) = 0$	$(x - 7)(x + 7) = 0$
$\mathbb{L} = \{10; 2\}$	$\mathbb{L} = \{0; 8\}$	$\mathbb{L} = \{-7; 7\}$

Rechnerische Lösung mit der Lösungsformel:

Die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ lautet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Der Radikand $b^2 - 4ac$ wird auch **Diskriminante D** genannt.

Ist **D < 0**, so gibt es **KEINE** Lösung.
Ist **D = 0**, so gibt es **genau eine** Lösung.
Im Falle **D > 0** existieren **zwei** Lösungen.

Beispiele:

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64 > 0$ also gibt es zwei Lösungen!

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2} = \frac{2(6 \pm 4)}{2} = 6 \pm 4$$

$x_1 = 6 + 4 = 10$ und $x_2 = 6 - 4 = 2$ also $\mathbb{L} = \{10; 2\}$

$3x^2 - 30x + 75 = 0$

$D = (-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 75 = 900 - 900 = 0$ also gibt es genau eine Lösung!

$$x_{1/2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm 0}{6} = \frac{30}{6} = 5$$ also $\mathbb{L} = \{5\}$

Die Gleichung $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ hat wegen
$D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 9 - 56 = -47 < 0$ keine Lösung, also $\mathbb{L} = \{\}$

delta9
Seite 70ff

Lösen von Gleichungen (IV)

Algebraisch Gleichungen höheren Grades

Beispiele und hilfreiche Methoden:

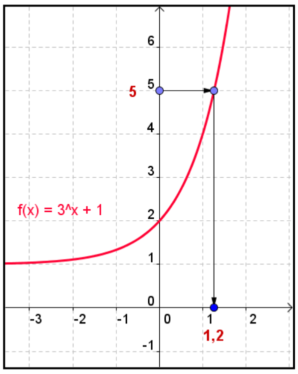
- $3x + 34 = 4(x - 2) - 17$ ⇢ **Äquivalenzumformungen** (Lineare Gleichung)
- $12x^7 = 36$ ⇢ **Radizieren**
  $x^7 = 3$ bzw. $x = \sqrt[7]{3}$
- $3x^2 + 4x = 63$ ⇢ **Lösungsformel** (Quadratische Gleichung)
- $3x^5 - 4x^3 + 12x^4 = 0$ ⇢ **x ausklammern** (hier x^3)
  $x^3 \cdot (3x^2 - 4 + 12x) = 0$ $x_1=0$, dann $x_{2/3}$ mit Lösungsformel
- $8x^4 - 5x^2 + 23 = 0$ ⇢ **Substitution** $z:=x^2$
  $8z^2 - 5z + 23 = 0$ dann Lösungsformel $z_{1/2}$
  (Rücksubstitution nicht vergessen! x gesucht!)
- $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$ ⇢ Eine Lösung **raten**, dann **Polynomdivision**
  (Siehe Funktionen (IX) – Nullstellen ganzrationaler Funktionen)

delta10
Seite 114 ff

Lösen von Gleichungen (V)

Exponential-gleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable nur im Exponenten auftritt, heißen **Exponentialgleichungen**.



Beispiele: ***a)*** $3^x + 1 = 5$ Graphische Lösung: $x \approx 1{,}2$

Rechnerische Lösung: $3^x + 1 = 5 \Rightarrow 3^x = 4$

$x = \log_3 4 \approx 1{,}262$

b)

$5^{x+2} - 8 = 12$
$5^{x+2} = 20$
$x + 2 = \log_5 20$
$x = \log_5 20 - 2$
$\approx -0{,}1386$

c)

$2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x-1} = 8$
$2^x \cdot (2^2 - 6 \cdot 2^{-1}) = 8$
$2^x \cdot (2^2 - 3) = 8$
$2^x = 8$
$x = 3$

d) $0{,}05 \cdot 5^{x+2} = 8^x$ (beidseitig logarithmieren – Basis 10)

$\log(0{,}05 \cdot 5^{x+2}) = \log(8^x)$ Rechenregeln für Logarithmus anwenden

$\log 0{,}05 + \log(5^{x+2}) = \log(8^x)$ Rechenregeln für Logarithmus anwenden

$\log 0{,}05 + (x+2) \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$ Ausmultiplizieren

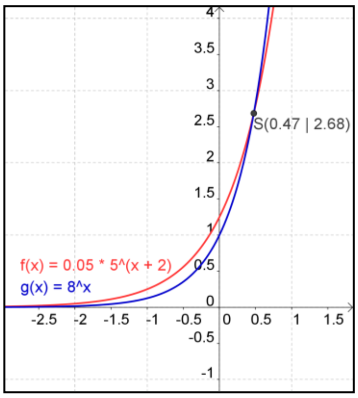
$\log 0{,}05 + x \cdot \log 5 + 2 \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$

$x \cdot \log 5 - x \cdot \log 8 = -2 \cdot \log 5 - \log 0{,}05$

$x \cdot (\log 5 - \log 8) = -2 \cdot \log 5 - \log 0{,}05$

$$x = \frac{-2 \cdot \log 5 - \log 0{,}05}{\log 5 - \log 8} = \frac{\log(5^{-2} : 0{,}05)}{\log \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{\log 0{,}8}{\log 0{,}625} = \log_{0{,}625} 0{,}8 \approx 0{,}47$$



delta10
Seite 80 ff

Eine Exponentialgleichung der Form $e^x = y$ hat die Lösung $x = \ln y$.

Folgende Zusammenhänge sind häufig für das Lösen von Gleichungen wichtig:

Für alle $x > 0$ gilt: $e^{\ln x} = x$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\ln(e^x) = x$

Beispiele:

a) $e^{x+1} = 10 \quad | \ln\ldots$
$\ln(e^{x+1}) = \ln(10)$
$x + 1 = \ln 10$
$x = \ln 10 - 1 \approx 1{,}3026$

b) $e^{x^2} = 2500 \quad | \ln \ldots$
$\ln(e^{x^2}) = \ln 2500$
$x^2 = \ln 2500$
$x = \pm\sqrt{\ln 2500} \approx \pm 2{,}797$

c) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ Substitution:
$(e^x)^2 - 5(e^x) + 4 = 0$ $e^x = z$
$z^2 - 5z + 4 = 0$ → Quadratische Gleichung (Vieta!)
$(z-1)(z-4) = 0$
$z_1 = 1$ oder $z_2 = 4$ Rück-Substitution

$e^x = 1$ also: $x_1 = \ln 1 = 0$
$e^x = 4$ also: $x_2 = \ln 4 \approx 1{,}386$

d) $\ln x = 4 \quad | e^{\cdots}$
$e^{\ln x} = e^4$
$x = e^4$

e) $\ln(2x + e) = 1 \quad | e^{\cdots}$
$2x + e = e^1$
$2x = 0$ bzw. $x = 0$

f) $(\ln x)^2 - 2\cdot\ln x - 3 = 0$ Faktorisieren! (Vieta)
$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

$\ln x = 3$ also: $x_1 = e^3$
$\ln x = -1$ also: $x_2 = e^{-1}$

Lösen von Gleichungen (VI)

Exponential-gleichungen

Logarithmus-gleichungen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 161ff

Lineare Gleichungs-Systeme (I)

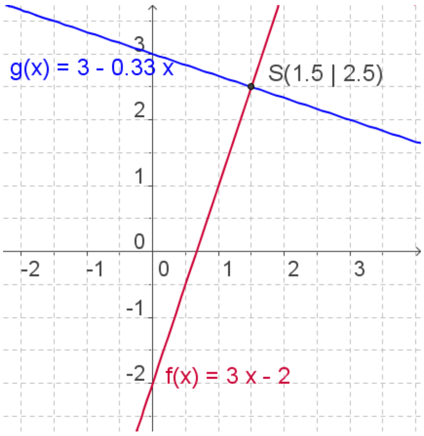
Mit zwei Variablen

Zwei lineare Gleichungen, die **zwei** Variable enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.

Beispiel:

I) 3y + x = 9
II) y = 3x - 2



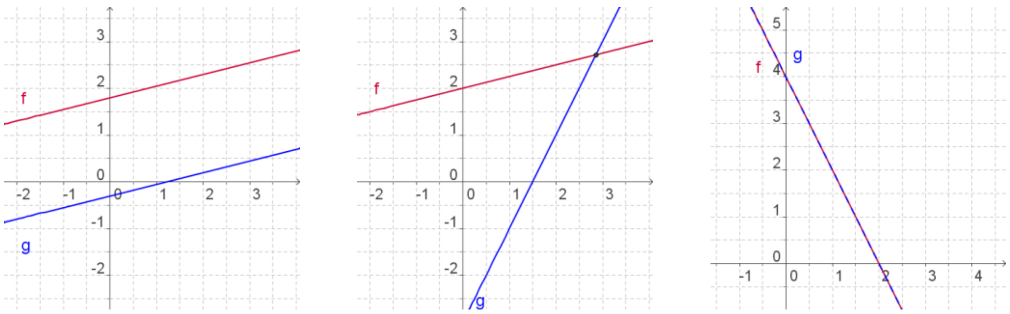
I) 3y + x = 9 → $g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

II) y = 3x – 2 → f(x)= 3x – 2

Die Koordinaten $x_s = 1{,}5$; $y_s = 2{,}5$ des Schnittpunkts S (1,5 I 2,5) der zugehörigen Geraden erfüllen als einzige beide Gleichungen.

Sie bilden zusammen die (einzige) Lösung des Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge also **IL** = {(1,5 | 2,5)} ist.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden zueinander parallel sind, einander schneiden oder zusammenfallen.



Die Lösung kann **graphisch** gefunden werden, indem man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem einträgt und die Koordinaten ihres Schnittpunkts abliest.

Das **Gleichsetzungsverfahren:**

1. Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen — $y = -\frac{1}{3}x + 3$ und $y = 3x - 2$
2. Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten — $-\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 2 \quad | \cdot 3$
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält — $-x + 9 = 9x - 6 \quad | +x, +6$; $15 = 10x \quad | :10$; $x = 1{,}5$
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen — $y = 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$
5. Angeben der Lösungsmenge — **IL** = {(1,5 | 2,5)}

delta8
Seite 73ff

Lineare Gleichungs-Systeme (II)

Mit zwei Variablen

Das **Einsetzungsverfahren:**

1. Auflösen einer der Gleichungen nach einer der Variablen — $3y + x = 9$; $y = 3x - 2$
2. Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung — $3(3x - 2) + x = 9$; $9x - 6 + x = 9$; $10x - 6 = 9$
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält — $10x = 15$; $x = 1{,}5$
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen — $y = 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$
5. Angeben der Lösungsmenge — $\mathbb{L} = \{(1{,}5 \mid 2{,}5)\}$

Das **Additionsverfahren:**

Unterscheiden sich bei einem Gleichungssystem die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen, so ist es günstig, die beiden Gleichungen zu addieren, da dann eine der beiden Variablen „wegfällt".

Beispiel:

I	$12x + 7y = 45$	
II	$-5x - 7y = -31$	
I + II	$7x = 14$	$\mid :7$
	$x = 2$	

In Gleichung I eingesetzt:
$12 \cdot 2 + 7y = 45$
$7y = 21$
$y = 3$
$\mathbb{L} = \{(2 \mid 3)\}$

Verallgemeinerung (siehe unten):
Wenn keine der beiden Variablen sofort durch bloßes Addieren „wegfällt", muss man eine der Gleichungen (oder beide Gleichungen) vor dem Addieren zunächst mit einem geeigneten Faktor (bzw. mit geeigneten Faktoren) multiplizieren.

Natürlich führt jedes dieser drei Verfahren zur gleichen Lösungsmenge.

Beispiel:

I	$-3x - 11y = 23$	$\mid \cdot 5$
II	$5x - 7y = 63$	$\mid \cdot 3$
I'	$-15x - 55y = 115$	
II'	$15x - 21y = 189$	
I' + II'	$-76y = 304$	$\mid :(-76)$
	$y = -4$	

In Gleichung II eingesetzt:
$5x - 7 \cdot (-4) = 63$
$5x + 28 = 63$
$5x = 35$
$x = 7$
$\mathbb{L} = \{(7 \mid -4)\}$

delta8
Seite 73ff

Lineare Gleichungs-Systeme (III)

Mit drei Variablen

Ein lineares Gleichungssystem kann auch aus **drei** linearen Gleichungen mit **drei** Variablen bestehen.

Beispiel:

(I) $2x + 3y + 2z = 3$
(II) $x + 4y + 4z = -2$
(III) $5x + 3y - z = 0$

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Lösungsverfahren:

Zuerst eliminiert man aus zwei Gleichungen eine der drei Unbekannten.
Das entstandene Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ist dann wie gewohnt zu lösen. Am Ende berechnet man noch den Wert der dritten Unbekannten.

… z. B. mit dem Einsetzverfahren: aus (II) folgt $x = -2 - 4y - 4z$

Einsetzen in I) ergibt $2(-2 - 4y - 4z) + 3y + 2z = 3$
$-4 - 8y - 8z + 3y + 2z = 3$
$\underline{-5y - 6z = 7 \qquad (I^*)}$

Einsetzen in III) ergibt $5(-2 - 4y - 4z) + 3y - z = 0$
$-10 - 20y - 20z + 3y - z = 0$
$\underline{-17y - 21z = 10 \qquad (III^*)}$

Aus I und III wird x eliminiert

$3{,}5 \cdot (I^*)$ ergibt $-17{,}5y - 21z = 24{,}5 \qquad (I^{**})$

$(III^*) - (I^{**}) \qquad 0{,}5y = -14{,}5$

$y = -29 \quad \Rightarrow \quad (\text{in } I^*) \quad z = 23$

$\Rightarrow \quad (\text{in II}) \quad x = -2 - 4(-29) - 4(23) = 22$

$\Rightarrow \quad \underline{\mathbb{L} = \{(22;-29;23)\}}$

… z. B. mit dem Additionsverfahren:

$I + 2 \cdot III) \quad 12x + 9y = 3$
$\underline{4x + 3y = 1 \qquad (IV)}$
$II + 4 \cdot III) \quad \underline{21x + 16y = -2 \qquad (V)}$

Es werden zwei Gleichungen ohne z erzeugt

$16 \cdot (IV) - 3 \cdot (V) \quad x = 22 \quad \Rightarrow \quad \ldots$

Beispiel:

(I) $x - 2y - z = 1$
(II) $-x + y + 2z = 2$
(III) $-2x + 4y + 2z = 6$

Es werden zwei Gleichungen ohne x erzeugt…

$(I)+(II) \qquad -y + z = 3$

$2 \cdot (I)+(III) \qquad 0 = 8$ ↯ $\quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbb{L} = \{\}}$

delta9
Seite 94ff

Funktionen (I)

Fachbegriffe

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann durch eine Zuordnung beschrieben werden: Gibt es dabei zu **jedem** zulässigen Wert der ersten Größe **genau einen** Wert der ihr zugeordneten zweiten Größe, so nennt man die Zuordnung eine **Funktion** f.

Funktionen können z. B. durch **Terme**, durch **Tabellen** oder durch **Schaubilder (Graphen)** beschrieben werden.

Häufig wird die erste Größe, die **unabhängige Variable**, mit **x** bezeichnet. Die zweite Größe, die von x **abhängige Variable**, bezeichnet man als Funktionswert von x.

Die Menge aller Werte von x heißt **Definitionsmenge D_f**,
die Menge aller **Funktionswerte** heißt **Wertemenge W_f**.

Werte von x, für die der Funktionswert 0 ist, heißen **Nullstellen** der Funktion.

Beispiel: **Zuordnungsvorschrift:**
Jeder rationalen Zahl wird der um 4 verminderte Wert ihres Quadrats zugeordnet.

Funktion f: f (x) = x^2 - 4

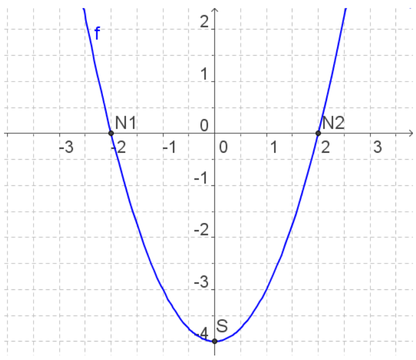
Funktionsgleichung Funktionsterm

x	0	±0,5	±1	±2
y = f(x)	-4	-3,75	-3	0

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W_f = [-4; +\infty[$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 2$,
da f (±2) = 0 ist.



Funktionsgraph

delta8
Seite 30ff

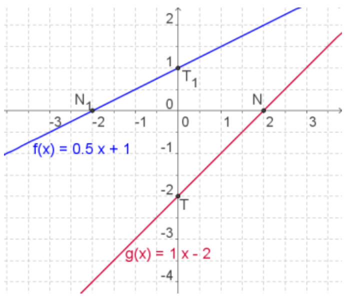
Funktionen (II)

Lineare Funktionen

f: f(x) = mx + t m, t ∈ $\mathbb{R}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Der Graph G_f einer linearen Funktion ist eine Gerade g, **die die y-Achse im Punkt T(0 | t) schneidet.**

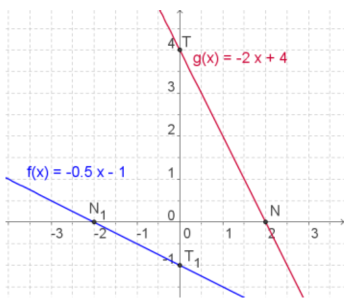
Man nennt t den **y-Achsenabschnitt** der Geraden g;
m ist die **Steigung** der Geraden g.



Steigende Geraden m > 0

Für die **Nullstelle** x_N von f gilt $f(x_N) = 0$.

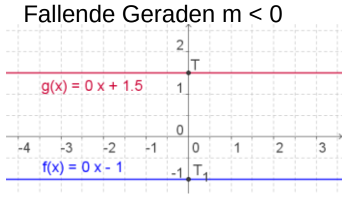
Man spricht auch von der Gleichung der Geraden g und schreibt g: y = mx + t.



Fallende Geraden m < 0

Verläuft die Gerade durch die Punkte
P (x_P I y_P) und Q (x_Q I y_Q), $x_Q \neq x_P$,
so gilt für die Geradensteigung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$



Zur x-Achse parallele Geraden m = 0

delta8
Seite 47ff

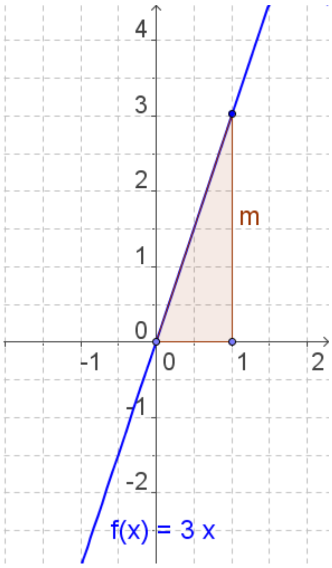
Funktionen (III)

Funktionen der direkten Proportionalität

Wird dem Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen, ... dem k-Fachen ($k \in \mathbb{R}$) einer Größe x das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, ... das k-Fache einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **proportionale Größen.**

Bei dieser Zuordnung gilt $\frac{y}{x} = m$ mit **festem** m ($m, x, y \neq 0$); sie kann also durch die Funktionsgleichung $y = mx$ beschrieben werden.

Die Funktion f: $f(x) = mx$; $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ heißt **proportionale Funktion.**



Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine **Gerade durch den Ursprung** des Koordinatensystems;
dabei ist m die **Steigung** dieser Geraden.

Das rechtwinklige Dreieck mit waagrechter Kathete der Länge 1 LE und senkrechter Kathete der Länge m LE heißt **Steigungsdreieck.**

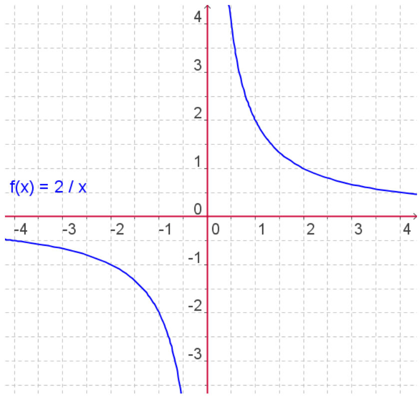
delta8
Seite 48ff

Funktionen (IV)

Funktionen der indirekten Proportionalität

Zwei Größen x und y heißen zueinander **indirekt proportional,** wenn gilt:
Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht ... , halbiert, drittelt ... man den Wert der einen Größe x, so halbiert, drittelt, viertelt ... , verdoppelt, verdreifacht ... sich der Wert der anderen Größe y.

Dem k-Fachen von x entspricht der k-te Teil von y und umgekehrt ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).



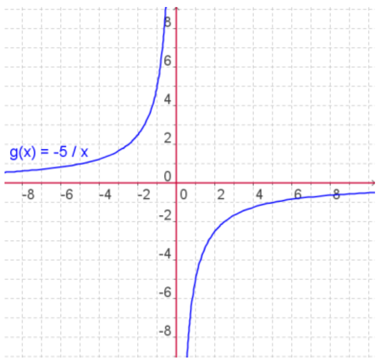
Das Produkt xy von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen hat stets den gleichen Wert:

$x \cdot y = a$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

d. h. $y = \frac{a}{x}$.

Jede Funktion f: $f(x) = \frac{a}{x}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
beschreibt die indirekte Proportionalität der beiden von null verschiedenen Variablen x und y.



Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Hyperbel.**

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote,**
die y-Achse eine **senkrechte Asymptote**
des Funktionsgraphen.

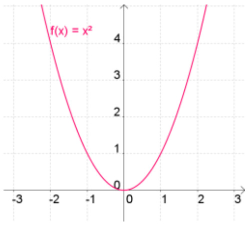
delta8
Seite 112ff

Funktionen (V)

Quadratische Funktionen

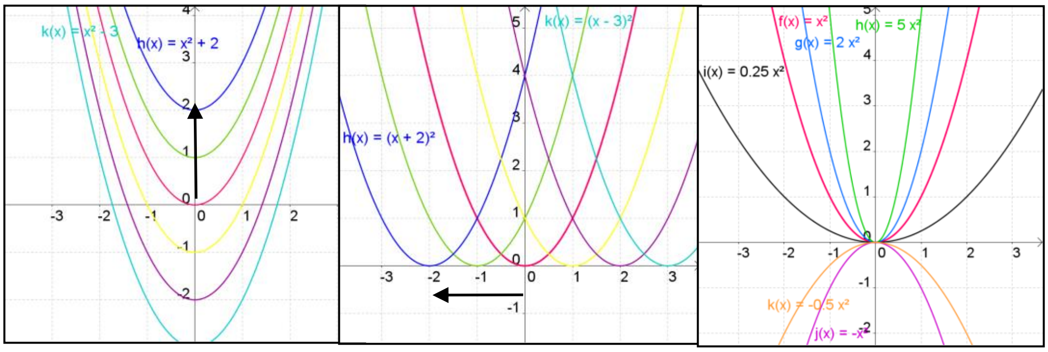
Normalparabel nennt man den Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$.

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\qquad W_f = \mathbb{R}_0^+$
Nullstelle $\qquad N(0 \mid 0)$
Tiefster Punkt: $\qquad$ **Scheitel** $S(0 \mid 0)$



Verschiebung der Normalparabel…

… in y-Richtung $f(x) = x^2 + a$ $\qquad$ **… in x-Richtung** $f(x) = (x + a)^2$ $\qquad$ **Streckung / Spiegelung** $f(x) = ax^2$



Der Graph der **quadratischen Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **Parabel**.
Dabei gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$
Der Graph hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse $s_y(0 \mid c)$.
Es gibt zwei, einen oder keinen Schnittpunkt(e) mit der x-Achse (**Nullstellen**).
Der tiefste / höchste Punkt der Parabel heißt **Scheitel**(punkt).
Der Graph ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel.

Der Graph der Parabel zur Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist für …

$a < -1$	…nach unten geöffnet	…enger als die Normalparabel
$a = -1$	…nach unten geöffnet	… kongruent zur Normalparabel
$-1 < a < 0$	…nach unten geöffnet	…weiter als die Normalparabel
$0 < a < 1$	…nach oben geöffnet	…weiter als die Normalparabel
$a = 1$	…nach oben geöffnet	… kongruent zur Normalparabel
$a > 1$	…nach oben geöffnet	…enger als die Normalparabel

Durch **quadratische Ergänzung** kann man jeden Funktionsterm einer Parabel auf die **Scheitelform** $f(x)= a(x - d)^2 + e$ bringen. Der Scheitel ist dann $S(d \mid e)$.

Beispiel: $\qquad f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1$

Quadratisch ergänzen

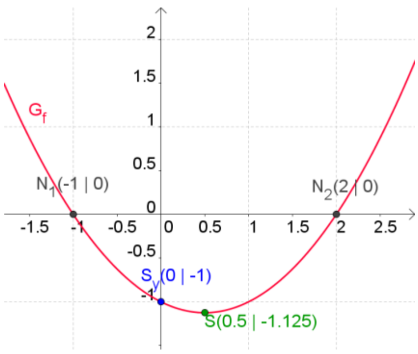
Ausklammern

Binomische Formel

$= \mathbf{0{,}5}\,[\,x^2 - x \;\mathbf{+ (0{,}5)^2 - (0{,}5)^2}\,] - 1$
$= 0{,}5\,[\,\mathbf{(x - 0{,}5)^2} \;- 0{,}25\,] - 1$
$= 0{,}5\,(x - 0{,}5)^2 - 0{,}125 - 1$
$= 0{,}5(x - \mathbf{0{,}5})^2 \;\mathbf{- 1{,}125}$

Somit: $\qquad G_f$ ist weiter als die Normalparabel und nach oben offen (a=0,5)!

Scheitel $S(\mathbf{0{,}5} \mid \mathbf{-1{,}125})$ $\qquad S_y(0 \mid -1)$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [\,-1 ; \infty\,[$
Nullstellen: $\qquad 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$
Mit Lösungsformel: $\qquad N_1(-1 \mid 0)$ und $N_2(2 \mid 0)$



delta9
Seite 58ff

Funktionen (VI)

Gebrochen-rationale Funktionen

Ist der Funktionsterm ein Bruchterm, bei dem die Variable mindestens im Nenner vorkommt, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion.**

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Variablen, für die der Nenner nicht gleich null wird.

Definitionslücken: Nullstellen des Nennerterms

Beispiel:

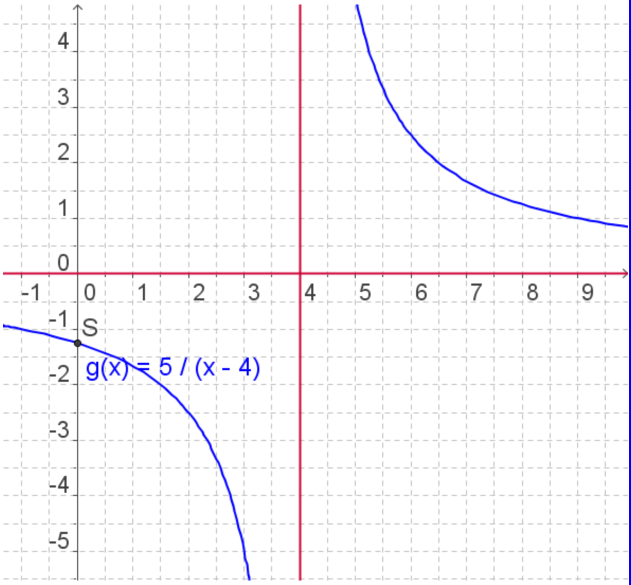
$$g(x) = \frac{5}{x-4} \qquad \mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Die Funktion g hat die Definitionslücke 4.

g hat keine Nullstelle.

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -1,25).

Waagrechte Asymptote: y = 0
Senkrechte Asymptote: x = 4



Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	-1	-1,25	-1,67	-2,5	-5	-	5	2,5

Beispiel:

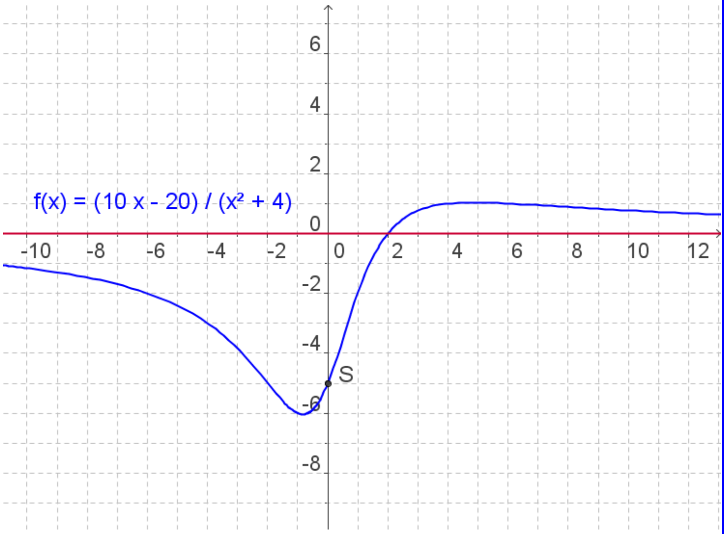
$$f(x) = \frac{10x-20}{x^2+4} \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

Die Funktion f hat keine Definitionslücke.

f hat die Nullstelle N(2 | 0).

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -5).

Waagrechte Asymptote:
y = 0
Senkrechte Asymptote:
Keine



x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	-2	-3	-5	-5	0	1	1	0,88

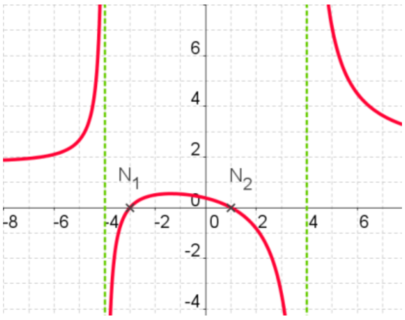
delta8
Seite 112ff

Funktionen (VI)
(Fortsetzung)

Gebrochen-rationale Funktionen

Allgemein: Eine **gebrochenrationale Funktion** hat einen Funktionsterm der Form $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. Die **Definitionslücken** sind die Nullstellen von q(x).

Die Definitionslücken und die Nullstellen einer Funktion lassen sich nach dem **Faktorisieren** sofort erkennen.



Beispiel:

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-6}{x^2-16}=\frac{2(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+4)}$$

Nullstellen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$

Definitionslücken: $x_3 = 4$ und $x_4 = -4$

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 8

Gilt an einer Definitionslücke x_0 einer gebrochen rationalen Funktion

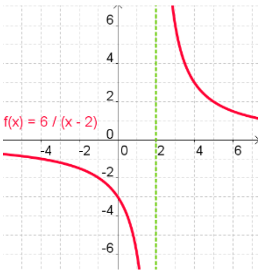
$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=+\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=-\infty$$

und $$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=+\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=-\infty,$$

so liegt bei x_0 eine so genannte **Polstelle** von f vor.
Die Gerade mit der Gleichung $x=x_0$ heißt **senkrechte Asymptote** des Graphen.

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 9

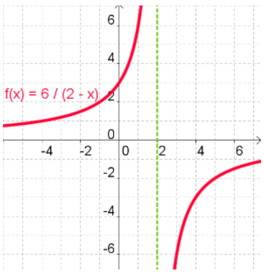
Hier die vier Arten von Polstellen: (Im Beispiel mit senkrechter Asymptote x = 2)



…**mit** Vorzeichen-wechsel (– nach +)

$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=-\infty$

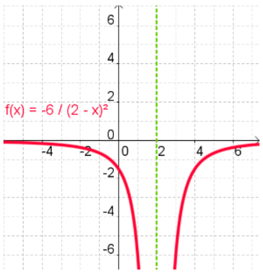
$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=+\infty$



…**mit** Vorzeichen-wechsel (+ nach -)

$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=+\infty$

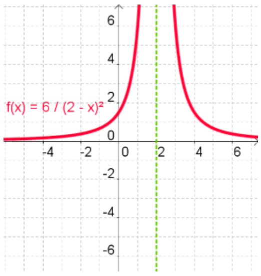
$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=-\infty$



…**ohne** Vorzeichen-wechsel (– / –)

$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=-\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=-\infty$



…**ohne** Vorzeichen-wechsel (+ / +)

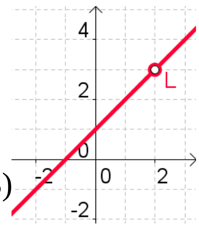
$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=+\infty$

Gilt an einer Definitionslücke x_0 einer gebrochen rationalen Funktion

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=a \quad \textbf{und} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=a$$

(**kurz:** $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$) so heißt x_0 **(be–)hebbare** Definitionslücke.



Beispiel: $f(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}=x+1$; $\lim_{x\to 2} f(x)=3$; Lücke bei (2|3)

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 10

Funktionen (VI)
(Fortsetzung)

Weitere Arten von Asymptoten erhält man für $|x| \to \infty$:

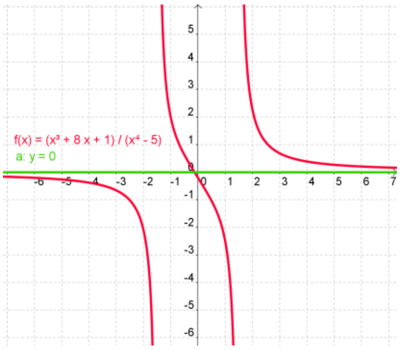
Allgemein: Es sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, z sei der Grad von p, n der Grad von q.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^3 + 7}{x^2 + 8x - 1}$ Zählergrad z = 5, Nennergrad n = 2

1. Fall: z < n
Der Graph hat die x-Achse als **waagrechte Asymptote**.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x + 1}{x^4 - 5}$

z = 3, n = 4 Waagr. A.: **y = 0**



2. Fall: z = n
Der Graph hat eine **waagrechte Asymptote** (nicht die x-Achse).

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 6}{x^3 - 5}$

z = 3, n = 3 Waagr. A.: **y = 2** Rest

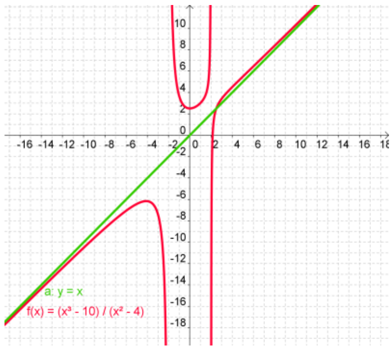
Polynomdivision ergibt: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 6}{x^3 - 5} = 2 + \dfrac{16}{x^3 - 5}$

3. Fall: z = n + 1
Der Graph hat eine **schräge Asymptote**.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^3 - 10}{x^2 - 4}$

z = 3, n = 2 Schiefe A.: **y = x** Rest

Polynomdivision ergibt: $f(x) = \dfrac{x^3 - 10}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x - 10}{x^2 - 4}$

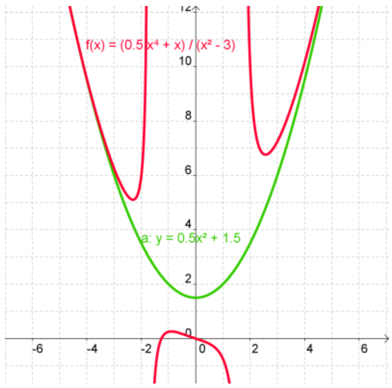


4. Fall: z > n + 1
Der Graph hat keine Asymptote (er besitzt eine **„asymptotische Kurve“**).

Beispiel: $f(x) = \dfrac{0{,}5x^4 + x}{x^2 - 3}$

z = 4, n = 2 **y = 0,5x²+1,5**

Polynomdivision ergibt: $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5 + \dfrac{x + 4{,}5}{x^2 - 3}$



Gebrochen-rationale Funktionen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 14f

Funktionen (VII)

Potenzfunktionen

Potenzfunktion (n-ten Grades)
nennt man Funktionen der Art $f(x) = ax^n$, ihren Graphen nennt man **Parabel** (n-ter Ordnung; für n>1).

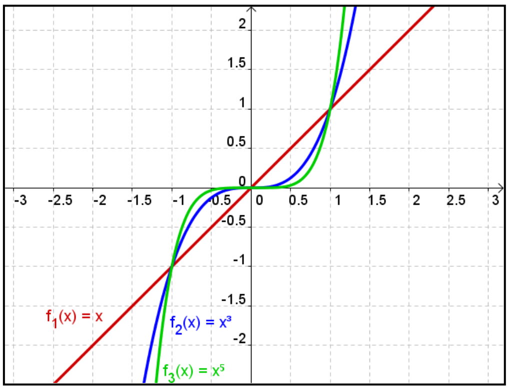
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$

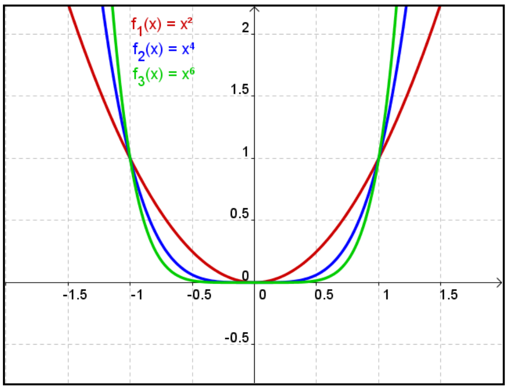
Bilder: a = 1

Oben: Exponent n ungerade
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
Punktsymmetrie zum Ursprung
Punkte (-1|-1) , (0|0) , (1|1)

Unten: Exponent n gerade
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$
Achsensymmetrie zur y-Achse
Punkte (-1|1) , (0|0) , (1|1)

Je größer der Exponent n wird, desto „flacher“ verläuft der Graph im Ursprung.





delta10
Seite 122 f

Funktionen (VIII)

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Funktionen der Form $f: x \rightarrow a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a\sqrt[q]{x^p}$

($a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) heißen

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.

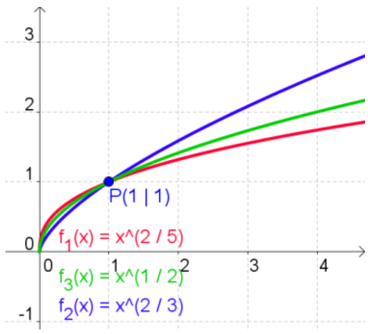
Insbesondere heißt $f: x \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

(Quadrat-) Wurzelfunktion.

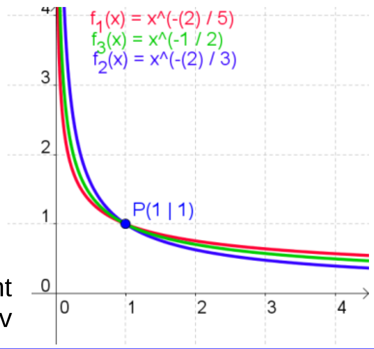
Die Funktion $f: x \rightarrow a \cdot x^{\frac{p}{q}}$ besitzt die

Umkehrfunktion $f^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{q}{p}}$.

Exponent positiv



Exponent negativ



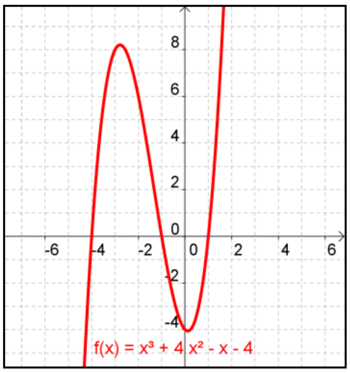
NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 139ff

Funktionen (IX)

Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $\quad a_n \neq 0$
nennt man **ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n-ten Grades.** $\quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Die reellen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten** des **Polynoms f(x).**



Nullstellen

Beispiel: $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4 \qquad S_y(\,0 \mid -4\,)$

Nullstellensuche: $f(x) = 0$ für $x_1 = 1$ (**Raten!**)

Weitere Nullstellen: **Polynomdivision** mit $(x - 1)$,
dann Lösungsformel mit dem Restpolynom:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 4x^2 - x - 4) : (x - 1) = x^2 + 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad 5x^2 - x \\ \quad \underline{-(5x^2 - 5x)} \\ \qquad 4x - 4 \\ \qquad \underline{-(4x - 4)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

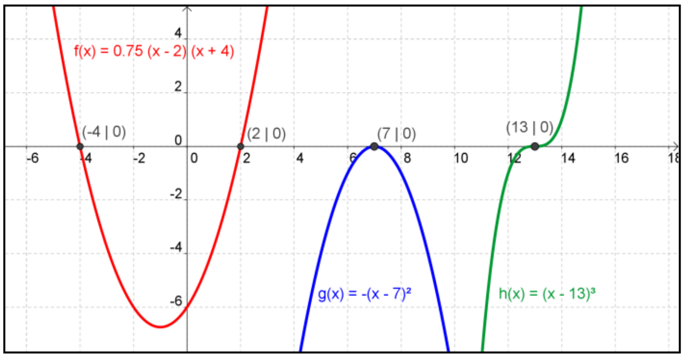
$$x_{2/3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$x_2 = -4$ und $x_3 = -1$

$N_1(\,1 \mid 0\,)$, $N_2(-4 \mid 0\,)$, $N_3(-1 \mid 0\,)$

Weitere Beispiele:

$f(x) = 0{,}75 \cdot (x-2) \cdot (x-4)$
Die Funktion zweiten Grades hat die beiden **(einfachen)** Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$, der Graph schneidet dort jeweils die x-Achse, f(x) wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen.



$g(x) = -(x-7)^2$ Grad 2 — Eine **(doppelte)** Nullstelle $x_{1/2} = 7$, der Graph berührt dort die x-Achse, es findet kein Vorzeichenwechsel statt!

$h(x) = (x-13)^3$ Grad 3 — Eine **(dreifache)** Nullstelle $x_{1/2/3} = 13$, der Graph schneidet die x-Achse, es findet ein Vorzeichenwechsel (von – nach +) statt!

Allgemein: Bei einer k-fachen Nullstelle…
… findet ein **Vorzeichenwechsel** statt (**Schnitt**), wenn **k ungerade** ist!
… findet **kein Vorzeichenwechsel** statt (**Berührung**), wenn **k gerade** ist!

Verhalten im Unendlichen

Das **Verhalten** einer Polynomfunktion **für betragsgroße Werte von x** ist der Summand $\mathbf{a_n x^n}$ verantwortlich:

$f(x) = \mathbf{x^3} + 4x^2 - x - 4$ Für $x \mapsto \infty$ gilt $f(x) \mapsto \infty$ und für $x \mapsto -\infty$ gilt $f(x) \mapsto -\infty$.

$g(x) = \mathbf{-3x^4} + 2x - 15$ Für $x \mapsto \infty$ gilt $g(x) \mapsto -\infty$ und für $x \mapsto -\infty$ gilt $g(x) \mapsto -\infty$.

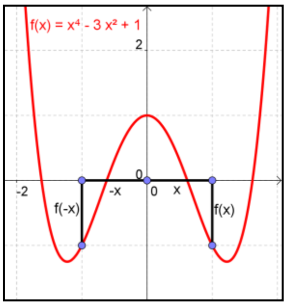
delta10
Seite 118 ff

Funktionen (IX)

(Fortsetzung)

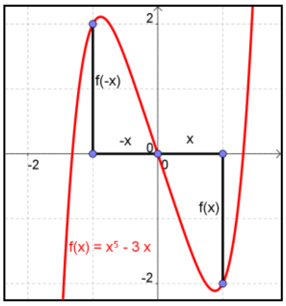
Ganzrationale Funktionen

Symmetrie



Eine Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt f(-x) = f(x)
(für alle $x \in D_f$)
(Bei Polynomfunktionen: nur **gerade** Exponenten)

Eine Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn gilt f(-x) = -f(x).
(für alle $x \in D_f$)
(Bei Polynomfunktionen: nur **ungerade** Exponenten)



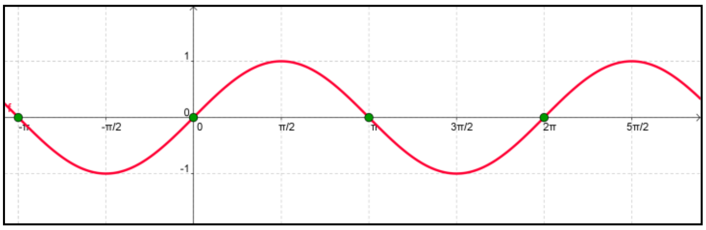
delta10
Seite 118 ff

Funktionen (X)

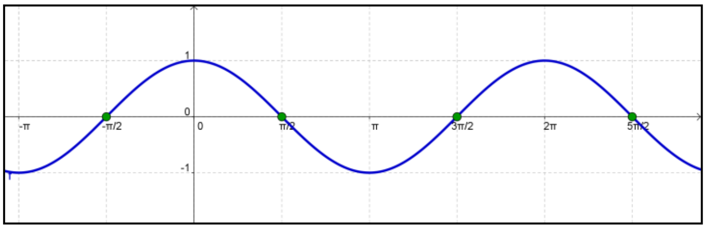
Sinusfunktion, Kosinusfunktion

Sinusfunktion:
y = sin x
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $W_f = [-1 ; +1]$
Periodenlänge 2π
Nullstellen bei $x_k = k \cdot \pi$

$(k \in \mathbb{Z})$



Kosinusfunktion:
y = cos x
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $W_f = [-1 ; +1]$
Periodenlänge 2π



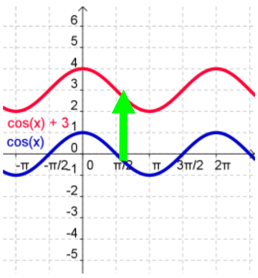
Nullstellen bei $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ x-Achse: Winkel im **Bogenmaß** !

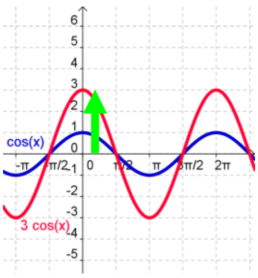
Die **allgemeine Sinus-/Kosinusfunktion**:

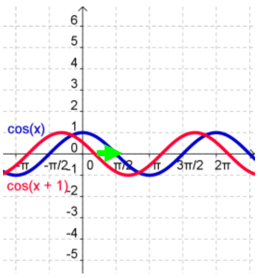
$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x + c)] + d$

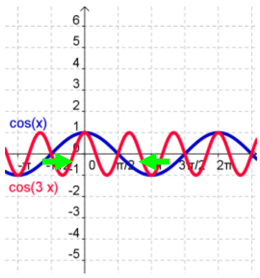
Die Periodenlänge ist nun $\frac{2\pi}{|b|}$. $a \neq 0$, $b \neq 0$

y = cos x + d **Verschiebung** um d in y-Richtung	y = a·cos x **Streckung** um |a| in y-Richtung	y = cos (x+c) **Verschiebung** um -c in x-Richtung	y = cos (b·x) **Streckung** um 1/|b| in x-Richtung









Analog: Die allgemeine Sinusfunktion.

delta10
Seite 40 ff

Funktionen (XI)

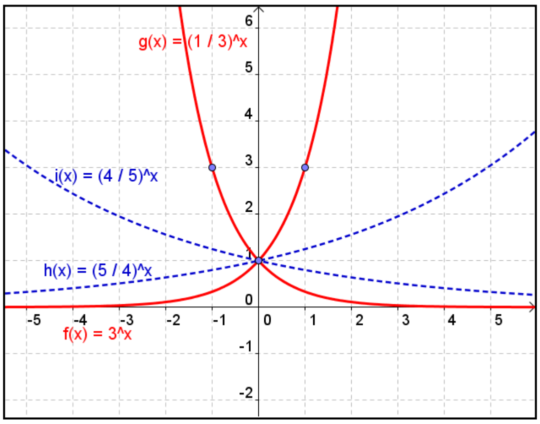
Exponentialfunktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = a^x$ nennt man **Exponentialfunktion.**

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ $\quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad W_f = \mathbb{R}^+$

Es gilt: $S_y(0|1)$

Für a>1 werden die Funktionswerte
für $x \to \infty$ immer größer.
Für 0<a<1 werden die Funktionswerte
für $x \to \infty$ immer kleiner.



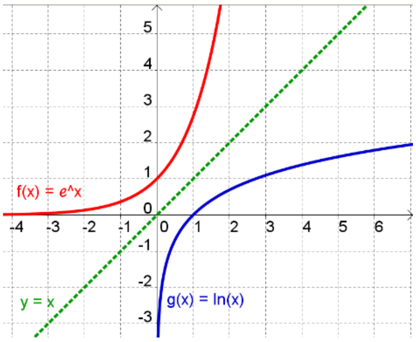
Die Graphen haben keine Nullstellen, die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.
Die Graphen von $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sind zueinander achsensymmetrisch.

delta10
Seite 66 ff

Funktionen (XII)

Exponential- und Logarithmus-funktionen

Bei der **natürlichen Exponentialfunktion** $f: x \to e^x$
ist die **Euler'sche Zahl e = 2,71828...** die Basis.
Es gilt:
$f'(x) = e^x$ und $F(x) = e^x$ ist eine Stammfunktion von f.



Die **natürliche Logarithmusfunktion** $f: x \to \ln x$
(für $x \in \mathbb{R}^+$) ist die Umkehrfunktion der
natürlichen Exponentialfunktion.
Die Euler'sche Zahl e ist die Basis des
natürlichen Logarithmus: $\ln x = \log_e x$

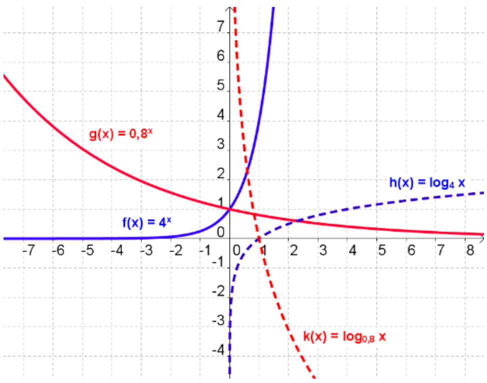
Es gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$ und

$F(x) = \ln|x|$ ist Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$.

Allgemeine Exponential- und Logarithmus-funktionen

$f: x \to a^x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist darstellbar als Exponential–
funktion mit der Basis e: $f(x) = e^{x \cdot \ln a}$

$g: x \to \log_a x$ kann man mithilfe der natürlichen
Logarithmusfunktion schreiben: $g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$



Wichtige Grenzwerte

Wichtige Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Für r>0 gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^r) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} (x^r \cdot \ln x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$

NEU
Lambacher
Schweizer 11
Seite 152ff

Funktionen (XIII)

Umkehrbarkeit, Umkehrfunktion

Eine Funktion f: $x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt.
Ist eine Funktion f umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung eine Funktion. Diese heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Kriterium für die Umkehrbarkeit:

Ist eine Funktion f streng monoton, so ist sie umkehrbar. Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion f, für die $f'(x) > 0$ für alle x in einem Intervall (bzw. $f'(x) < 0$ für alle x in einem Intervall), in diesem Intervall umkehrbar.

Die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind zueinander symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Es gilt: $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$

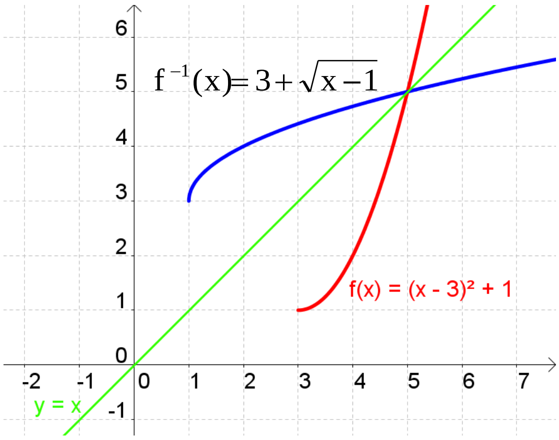
Wie bestimmt man den Funktionsterms $f^{-1}(x)$?

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x
2. Variablentausch $x \leftrightarrow y$, wobei nun $y = f^{-1}(x)$

Beispiel:

$f(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$
ist in $D_f =]3\,;\infty[$ umkehrbar, denn
$f'(x) = 2x - 6 > 0$ für $x > 3$
(f ist streng monoton steigend)

$y = (x-3)^2 + 1$
$y - 1 = (x-3)^2$
$\sqrt{y-1} = x - 3$
$3 + \sqrt{y-1} = x$
$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1}$; $D_{f^{-1}} = W_f =]1\,;\infty[$



NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 130ff

Funktionen (XIV)

Verkettung von Funktionen

Für zwei Funktionen v: $x \mapsto v(x)$ und u: $x \mapsto u(x)$ heißt die Funktion $u \circ v$: $x \mapsto u(v(x))$ **Verkettung** oder **Hintereinanderausführung** der Funktionen u und v.

v heißt **innere** und u **äußere Funktion**.

Es gilt im Allgemeinen: $u \circ v \neq v \circ u$.

Umgekehrt lässt sich oft eine komplizierte Funktion f als Verkettung von einfacheren Funktionen u und v darstellen mit $f = u \circ v$ (Zerlegung einer Verkettung).

$f(x) = u(v(x)) = \mathbf{5(}3x^2 - 7\mathbf{)^4}$

$v(x) = 3x^2 - 7$
innere Funktion
$u(x) = 5x^4$
äußere Funktion

Umgekehrt:

$g(x) = v(u(x))$
$= 3(5x^4)^2 - 7 = \ldots$

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 133ff

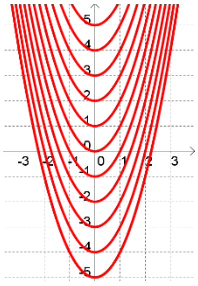
Funktionen (XV)

Funktionen mit Parametern

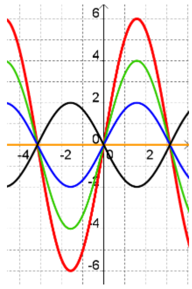
Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch eine weitere (von x unabhängige) Variable a, so gehört zu jedem möglichen Wert von a eine Funktion $f_a : x \rightarrow f_a(x)$.
Die Variable a nennt man **Parameter**.

Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**.

$f_a(x) = x^2 + a$



$g_t(x) = t \cdot \sin(x)$



NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 208ff

Funktionen (XVI)

Vorgehen bei einer Funktionsbestimmung

Um eine Funktion f zu bestimmen, die vorgegebene Eigenschaften hat, z.B.

- Punkte auf dem Graphen,
- Extremstellen oder die Steigung des Graphen an einer Stelle,
- Nullstellen oder Polstellen,

sind diese Eigenschaften (Bedingungen) mithilfe von f oder f' als Gleichungen zu formulieren und das Gleichungssystem zu lösen.

Die nötige Anzahl von Gleichungen wird durch die Zahl der Parameter im Funktionsterm bestimmt.

Die Berücksichtigung von besonderen Eigenschaften, wie z. B.

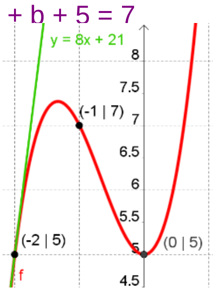
- Symmetrie des Graphen,
- Existenz einer waagrechten Asymptote,

kann gegebenenfalls den Ansatz für den Funktionsterm vereinfachen, insbesondere, wenn in realen Situationen das Koordinatensystem geeignet gewählt wird.

Beispiel: Gesucht: Ganzrationale Funktion dritten Grades mit TIP(0|5) durch (–1|7) und der Steigung 8 an der Stelle x = –2

Ansatz:

f(x) = ax³ + bx² + cx + d
f'(x) = 3ax² + 2bx + c
f(0) = 5 → d = 5
f '(0) = 0 → c = 0
f (–1) = 7 → –a + b + 5 = 7
bzw. –a+b = 2
f '(–2) = 8 →
12a – 4b = 8
…
a = 2
b = 4
Also:
f(x) = 2 x³ + 4 x² + 5



NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 212ff

Funktionen (XVII)

Vorgehen bei einer Funktionsanpassung

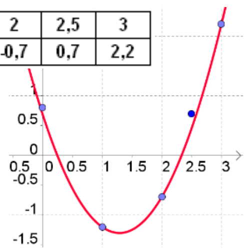
1) Daten in ein Koordinatensystem eintragen.

2) Mithilfe von Parametern Gleichung einer Funktion aufstellen, deren Graph näherungsweise durch die gegebenen Punkte gehen soll.

3) Je nach Zahl der Parameter die Koordinaten einer entsprechenden Zahl von Punkten in die Funktionsgleichung einsetzen und das entstandene Gleichungssystem lösen.

4) Mithilfe der Koordinaten weiterer Punkte die Brauchbarkeit der gefundenen Funktion überprüfen.

x	0	1	2	2,5	3
y	0,8	-1,2	-0,7	0,7	2,2



Ansatz:
f(x) =ax²+bx+c
f(1) = –1,2 → a+b+c = –1,2
f(2) = –0,7 → 4a+2b+c = –0,7
f(3) = 2,2 → 9a+3b+c= 2,2
…
→ **f(x) = 1,2x² – 3,1x + 0,7**

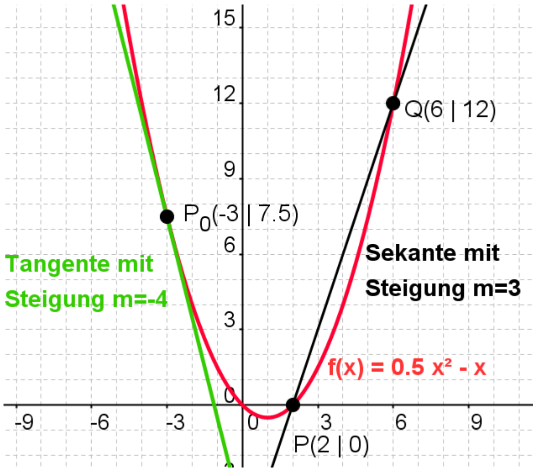
NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 215ff

Ist die Funktion f auf dem Intervall [a;b] definiert, so heißt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate** von f im Intervall [a ; b].

Anschaulich entspricht $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte P(a | f(a)) und Q(b | f(b)).

Beispiel:
f(x) = 0,5x² – x
Mittlere Änderungsrate
im Intervall [2; 6]: (Punkte P und Q)

$$m=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{12-0}{6-2}=\frac{12-0}{4}=\underline{\underline{3}}$$



Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ der mittleren Änderungsrate existiert, dann heißt er
Differentialquotient oder **lokale (momentane) Änderungsrate**
von f an der Stelle x_0 und wird meist mit m_{x_0} bezeichnet.

Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ mit der Steigung m_{x_0} heißt
Tangente an den Graphen in P_0. Die Tangentensteigung m_{x_0} wird als **Steigung des Graphen** im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ bezeichnet.

Im Beispiel: f(x) = 0,5x² – x (Bild siehe oben)
Lokale Änderungsrate an der Stelle $x_0 = -3$: $P_0(-3 \mid 7{,}5)$

$$m_{-3}=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{0{,}5x^2-x-7{,}5}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{0{,}5(x^2-2x-15)}{x+3}=$$
$$\lim_{x\to-3}\frac{0{,}5(x+3)(x-5)}{x+3}=\lim_{x\to-3}0{,}5(x-5)=0{,}5(-3-5)=\underline{\underline{-4}}$$

„Tangentensteigung im Punkt P_0: m = – 4“
Oder:
„Der Graph G_f hat im Punkt P_0 die Steigung m = – 4“

Differential-rechnung (I)

Differenzen-quotient

(Mittlere Änderungsrate)

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 28ff

Differential-quotient

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 31ff

Differential-rechnung (II)

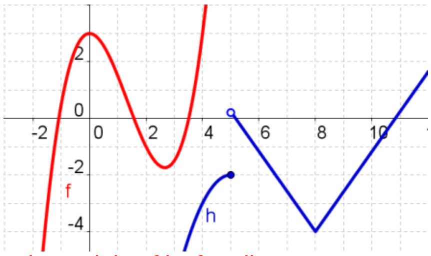
Differenzier-barkeit

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 36ff

Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 den Differentialquotienten bzw. die lokale (momentane) Änderungsrate $m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Man nennt den Grenzwert m_{x_0} die Ableitung von f an der Stelle x_0 und schreibt dafür $f'(x_0)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist also gleich der lokalen (momentanen) Änderungsrate m_{x_0}.

Ist eine Funktion f für alle Werte x_0 aus einem Intervall I differenzierbar, so nennt man f eine **auf I differenzierbare Funktion**.



Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion h ist für $x_1 = 5$ und $x_2 = 8$ nicht differenzierbar.

Differential-rechnung (III)

Ableitungs-funktion,

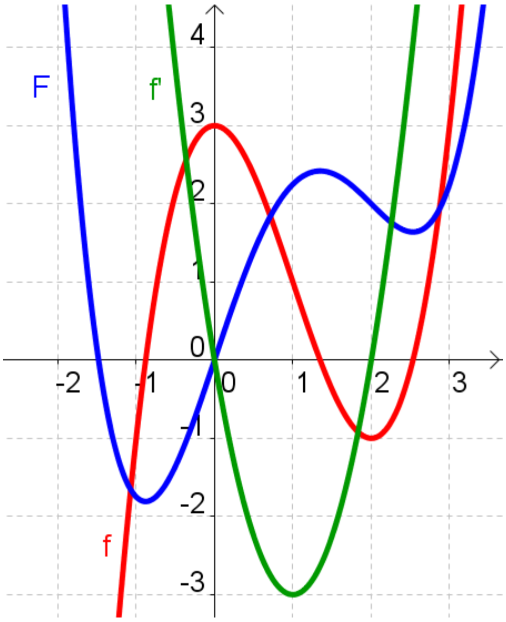
Stamm-funktion

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 40ff

Zu einer Funktion f heißt die Funktion f: $x \mapsto f'(x)$ die **Ableitungsfunktion** oder kurz die **Ableitung von f**.

Eine Funktion F heißt eine **Stammfunktion** der Funktion f, wenn im gemeinsamen Definitionsbereich gilt: $F'(x) = f(x)$

Jede ganzrationale Funktion f vom Grad n ist differenzierbar und ihre Ableitung ist eine ganzrationale Funktion vom Grad n – 1.



Beispiel:

Funktion:	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
Ableitung:	$f'(x) = 3x^2 - 6x$
Stammfunktion:	$F(x) = 0.25x^4 - x^3 + 3x$

Differential-rechnung (IV)

Ableitungs-regeln

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 47ff

Potenzfunktionen:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$
Summenregel:	$f(x) = g(x) + h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Faktorregel:	$f(x) = c \cdot g(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$ $(c \in \mathbb{R})$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Beispiele:

$f(x) = x^5 + x^2 - 7x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 2x^1 - 7 = 5x^4 + 2x - 7$

$f(x) = 5x^6 \cdot 2x^3 = 10x^9 \Rightarrow f'(x) = 30x^5 \cdot 2x^3 + 5x^6 \cdot 6x^2 = 60x^8 + 30x^8 = 90x^8$

$$f(x) = \frac{10x^4}{5x^2} = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{40x^3 \cdot 5x^2 - 10x^4 \cdot 10x}{[5x^2]^2} = \frac{200x^5 - 100x^5}{25x^4} = \frac{100x^5}{25x^4} = 4x$$

Differentialrechnung (V)

Monotonie

Einen Funktion f heißt **streng monoton zunehmend** in einem Intervall J des Definitionsbereichs, wenn für alle x_1, x_2 aus J mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

Einen Funktion f heißt **streng monoton abnehmend** in einem Intervall J des Definitionsbereichs, wenn für alle x_1, x_2 aus J mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

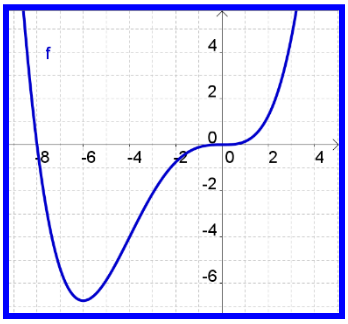
Gilt: $f(x_1) \leqq f(x_2)$, so heißt f **monoton zunehmend** in J,
$f(x_1) \geqq f(x_2)$, so heißt f **monoton abnehmend** in J.

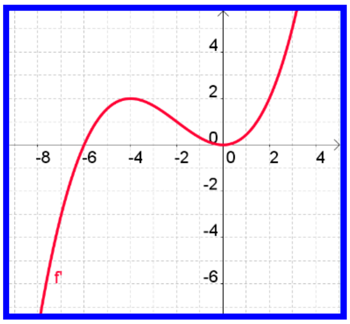
Monotoniekriterium: Die Funktion f sei im Intervall J differenzierbar.

Wenn für alle $x \in J$ gilt

$f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton zunehmend in J,
$f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton abnehmend in J.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$, $f'(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{16}(x+6)x^2$





f ist

…streng monoton abnehmend im Intervall]-∞; -6]

…streng monoton zunehmend im Intervall]-6; +∞]

$f'(x) = 0$ für
$x_1=-6$ und $x_2=0$

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 64ff

Differentialrechnung (VI)

Extremwerte

Wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt

- $f(x) \leqq f(x_0)$, dann heißt der Funktionswert $f(x_0)$ **lokales Maximum**,
- $f(x) \geqq f(x_0)$, dann heißt der Funktionswert $f(x_0)$ **lokales Minimum** von f.

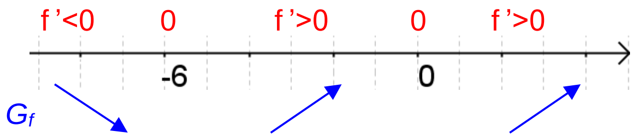
Ist der Funktionswert $f(x_0)$ ein Maximum oder ein Minimum, nennt man ihn auch **Extremwert** und X_0 eine **Extremstelle**. Der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ des zu f gehörenden Graphen heißt **Extrempunkt**. Im Falle des Maximums heißt P **Hochpunkt**, im Falle des Minimums heißt P **Tiefpunkt**.

Bedingung für Extremwerte: Die Funktion f sei auf einem Intervall J =]a; b[differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von J, d.h. $x_0 \in$]a; b[.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat, dann hat die Funktion f ein lokales Maximum an der Stelle x_0.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von - nach + hat, dann hat die Funktion f ein lokales Minimum an der Stelle x_0.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$



Also: Lokales (und globales) Minimum bei (-6|-6,75) und ein Terrassenpunkt bei (0|0)

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 68ff

Differentialrechnung (VII)

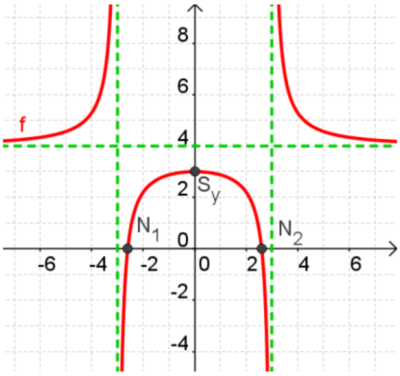
Funktionsuntersuchungen

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 74ff

Man kann eine Funktion unter den folgenden Aspekten untersuchen:

Beispiel: $f(x) = 3 + \frac{x^2}{x^2 - 9}$

- Definitionsmenge — $D_f = IR \setminus \{-3; +3\}$
- Symmetrie — Achsensym.
- Schnittpunkte mit den Achsen (Nullstellen / y-Achsenabschnitt) — $S_y(0|3)$ = HOP; $N(\pm 2{,}6|0)$
- Verhalten an den Definitionslücken
- Verhalten im Unendlichen — **(Asymptoten)**
- Monotonie und Extremwerte
- Graph



Differentialrechnung (VIII)

Newtonverfahren

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 81ff

Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle x_N, so kann diese näherungsweise mit dem **Newton-Verfahren** ermittelt werden.

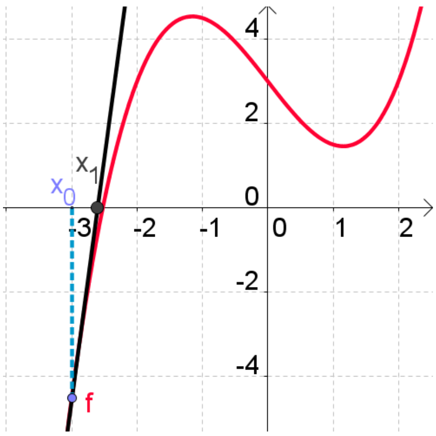
Ist x_0 ein sinnvoll gewählter Näherungswert für die Nullstelle x_N so kann man x_0 sukzessive verbessern durch folgende Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel: $f(x) = 0.5\,x^3 - 2\,x + 3$

$f'(x) = 1.5\,x^2 - 2$ $\qquad x_0 = -3$

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -3 - \frac{-4{,}5}{11{,}5} \approx -2{,}609$$



Differentialrechnung (IX)

Ableitung von verketteten Funktionen

NEU Lambacher Schweizer 11 Seite 136ff

Ableitung von verketteten Funktionen **(Kettenregel)**

Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v,

so ist auch f differenzierbar, und es gilt für $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$:

$f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beispiele: $f(x) = 5(3x^2 - 7)^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5 \cdot 4(3x^2 - 7)^3 \cdot (6x)$

$v(x) = 3x^2 - 7$ innere Funktion

$u(x) = 5x^4$ äußere Funktion

„Nachdifferenzieren"

$g(x) = \sqrt{6x^3 - 5x} = (6x^3 - 5x)^{0,5} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 0{,}5(6x^3 - 5x)^{-0,5} \cdot (18x^2 - 5)$

$v(x) = 6x^3 - 5x$ innere Funktion

$u(x) = \sqrt{x}$ äußere Funktion

Für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen gilt:

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

Beispiele:

$f(x) = x^2 + 5 \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 5 \cdot \sin x$

$f(x) = (\sin x)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$

$f(x) = x^3 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$

Differential-rechnung (X)

Ableitung von trigonometr. Funktionen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 126ff

Für Potenzfunktionen gilt ($a \in IR$, $p \in Z$ und $q \in IN$):

$$f : x \to a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a\sqrt[q]{x^p} \quad \Rightarrow \quad f' : x \to a \cdot \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Beispiele:

$$f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 1{,}5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1{,}5 \cdot \sqrt{x^{-1}}$$

$$f(x) = 6 \cdot x^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt[3]{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 4 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}$$

Differential-rechnung (XI)

Ableitung von Potenz-funktionen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 139ff

Exponentialfunktion: $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

Logarithmusfunktion: $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

Die Funktion $f : x \to e^{v(x)}$ hat die Ableitung $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$.

Die Funktion $f : x \to \ln|v(x)|$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Allg. Exponentialfunktion: $f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$

Allg. Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

Beispiele:

$f(x) = 2 \cdot e^{7x+5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot e^{7x+5} \cdot 7 = 14 \cdot e^{7x+5}$

$f(x) = 5^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \ln 5 \cdot 5^{x^2} \cdot 2x$

$f(x) = \ln(3x+6) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3x+6} \cdot 3 \quad (x > -2)$

Differential-rechnung (XII)

Ableitungen von Exponential- und Logarithmus-funktionen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 152ff

---

1. Beschreiben der Größe, die extremal werden soll, durch einen Term, der mehrere Variablen enthalten kann.
2. Gegebenen <u>Nebenbedingungen</u> formulieren.
3. Die Zielfunktion bestimmen.
   (Sie hängt nur noch von einer Variablen ab.)
4. Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte.
   Ergebnis formulieren. (Randwerte berücksichtigen!)

Beispiel: *Bestimme die Zahlen a und b mit <u>a + b = 60</u>* und dem größten Produktwert.

$P = a \cdot b$

$P(a) = a \cdot (60 - a) = -a^2 + 60a$

$P'(a) = -2a + 60$

$P'(a) = 0 \Rightarrow a = 30 = b$

Die Zielfunktion kann durch geschickte Wahl der Variablen und die geeignete Verwendung von Nebenbedingungen entscheidend vereinfacht werden.

Differential-rechnung (XIII)

Vorgehen beim Lösen von Extremwert-problemen

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 201ff

Kommutativgesetz: Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man die Summanden (Faktoren) vertauscht. $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ **Assoziativgesetz:** Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man Summanden (Faktoren) mit Klammern zusammenfasst oder vorhandene Klammern weglässt. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **Distributivgesetz:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) : a = b : a + c : a \quad (a \neq 0)$	**Rechengesetze** **RECHENARTEN** delta5 delta6
Zahlen mit sehr großem bzw. mit sehr kleinem Betrag kann man mithilfe von Zehnerpotenzen übersichtlich darstellen: *Beispiele:* $87\,000\,000 = 8{,}7 \cdot 10\,000\,000 = 8{,}7 \cdot 10^7$ Komma um 7 Stellen nach links… $0{,}00035 = 3{,}5 \cdot 0{,}0001 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ Komma um 4 Stellen nach rechts… Allg.: $a \cdot 10^{\pm n}$ Für a gilt $1 < a < 10$.	**Wissenschaftliche Schreibweise** **„Gleitkommadarstellung"** **RECHENARTEN** delta8 Seite 132
Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ bzw. $x^a : x^b = x^{a-b}$ $\quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $4^2 \cdot 4^4 = 4^{2+4} = 4^6 = 4096$ $\quad 7^2 : 7^{-3} = 7^{2-(-3)} = 7^5 = 16807$ **Potenzieren einer Potenz** $(x^a)^b = x^{ab}$ $\quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $(4^2)^4 = 4^8 = 65536$ $\quad (3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$ **Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten** $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ bzw. $x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ $\quad x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ *Beispiele:* $3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5 = 7776$ $\quad 4^{-2} : 2^{-2} = (4:2)^{-2} = 2^{-2} = 0{,}25$	**Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten** **RECHENARTEN** delta8 Seite 134
Die nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz x ist, nennt man die **n-te Wurzel** aus x. Schreibweise: $\sqrt[n]{x}$ Es gilt also: $\quad x \in \mathbb{R}_0^+$ $\sqrt[n]{x} \geq 0$ und $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ und $\sqrt[n]{x^n} = x$ $\quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ Bezeichnungen: Der Term unter der Wurzel heißt **Radikand**. n heißt **Wurzelexponent**. (Der Wurzelexponent 2 wird meistens weggelassen!) *Beispiele:* $\sqrt[3]{8} = 2$ (weil $2^3 = 8$) $\quad \sqrt[3]{125} = 5$ (weil $5^3 = 125$)	**Allgemeine Wurzel** **RECHENARTEN** delta9 Seite 110ff

Allgemeine Wurzeln lassen sich auch als Potenzen darstellen:

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ Dabei gilt: $x \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$

Beispiele:

$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^3} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$ $512^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$

$256^{0,375} = 256^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{256^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = \sqrt[8]{(2^3)^8} = 2^3 = 8$

Potenzen mit rationalen Exponenten

RECHENARTEN

delta9
Seite 114ff

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

$x^{\frac{a}{p}} \cdot x^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}$ $x \in \mathbb{R}^+$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ und $p,q \in \mathbb{N}$

Beispiele: $5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{5^9} \approx 4{,}26$; $2^{2,7} \cdot 2^{0,3} = 2^{\frac{27}{10}} \cdot 2^{\frac{3}{10}} = 2^3 = 8$

Potenzieren einer Potenz

$\left(x^{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a}{p}\cdot\frac{b}{q}}$ $x \in \mathbb{R}^+$ und $a,b \in \mathbb{Z}$ und $p,q \in \mathbb{N}$

Beispiele: $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 32^{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}} = 32^{\frac{6}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^6 = 2^6 = 64$; $\left(5^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{50}} = 5^{\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{50}} = 5^{\frac{6}{25}} = \sqrt[25]{5^6}$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten

$x^{\frac{a}{p}} \cdot y^{\frac{a}{p}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{p}}$ bzw. $x^{\frac{a}{p}} : y^{\frac{a}{p}} = (x : y)^{\frac{a}{p}}$ $x,y \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$

Beispiele: $2^{\frac{3}{2}} \cdot 18^{\frac{3}{2}} = (2 \cdot 18)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{36}\right)^3 = 6^3 = 216$

$40^{\frac{4}{5}} : 10^{\frac{4}{5}} = (40 : 10)^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{4}\right)^4 \approx 3{,}03$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

RECHENARTEN

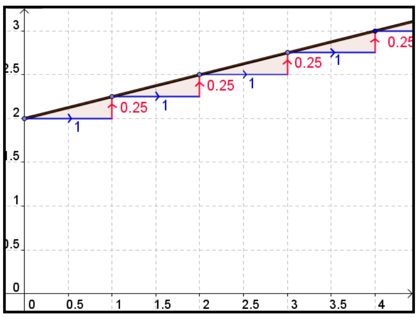
delta9
Seite 114ff

Bei einem **linearen Wachstum** ist der Zuwachs pro Zeiteinheit konstant.

Gleichung: **y = b + a·x**

b ist der (Anfangs-)Bestand für x = 0.

Beispiel rechts: a = 0,25 und b = 2



Wachstum (I)

RECHENARTEN

delta10
Seite 60 ff

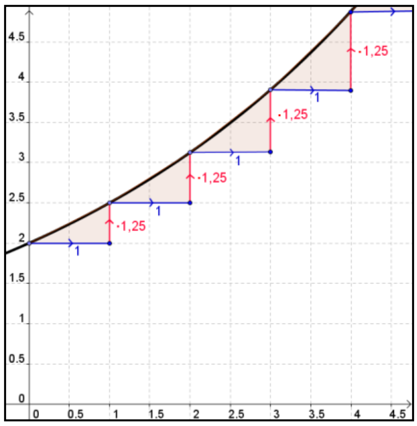
Wachstum (II)

RECHENARTEN

Bei **exponentiellem Wachstum** ist der Zuwachs immer direkt proportional zum aktuellen Bestand.

Gleichung: $y = b \cdot a^x$

Beispiel rechts: a = 1,25 und b = 2



Für **a > 1** heißt **a** der **Wachstumsfaktor**, ist **a < 1**, dann wird **a** **Abnahmefaktor** oder **Zerfallskonstante** genannt.

Die Zeitspanne, in der der Bestand jeweils halbiert wird, heißt **Halbwertszeit**.

$$t_H = \log_a 0{,}5 = \frac{\log 0{,}5}{\log a} \qquad (0 < a < 1)$$

delta10 Seite 60 ff

Logarithmus

RECHENARTEN

Die Gleichung $\mathbf{b^x = p}$ hat die Lösung $\mathbf{x = \log_b p}$ $\qquad b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(„Logarithmus von p zur Basis b") $\qquad p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Beispiele:

$2^x = 8$	$3^x = 15$	$25^x = 625$
$x = \log_2 8 = 3$	$x = \log_3 15$	$x = \log_{25} 625 = 2$

$\mathbf{\log_b p}$ ist diejenige Zahl, mit der man die Basis b potenzieren muss, um p zu erhalten.

Das Logarithmieren zur Basis b ist eine Umkehrung des Potenzierens der Basis b.

z.B. b=3: $2 \underset{\log_3 9}{\overset{3^2}{\rightleftarrows}} 9$

Allgemein: $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b y} = y$ $\quad |$ mit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$

Sonderfälle: $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$ $\quad |$ und $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Schreibweise: $\log_{10} x = \log x = \lg x$

delta10 Seite 70 ff

Rechenregeln für den Logarithmus

RECHENARTEN

$\log_b(pq) = \log_b p + \log_b q$ (Logarithmus eines Produkts)

$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$ (Logarithmus eines Quotienten)

$\log_b(p^r) = r \cdot \log_b p$ (Logarithmus einer Potenz)

$\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$ (Basiswechsel)

Dabei: $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $p, q \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$

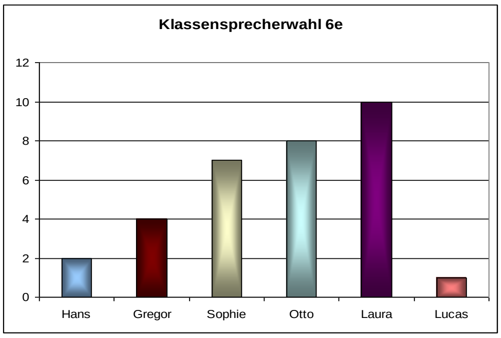
delta10 Seite 74 ff

Tabellen und Diagramme

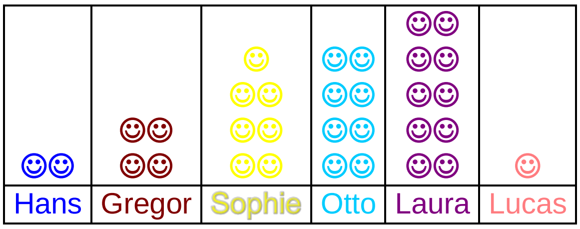
Tabelle

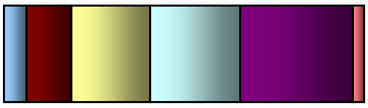
Schüler	Hans	Gregor	Sophie	Otto	Laura	Lucas
Stimmen	2	4	7	8	10	1
Anteil (%)	6,25%	12,5%	≈21,88%	25%	31,25%	≈3,13%

Säulendiagramm

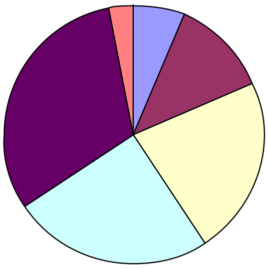


Bilddiagramm





Blockdiagramm (Streifendiagramm)



Kreisdiagramm

delta5 Seite 22

delta6 Seite 34

Zufallsexperimente

Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, d.h. nicht voraussagbar ist, nennen wir **Zufallsexperimente.**

Beispiele: Werfen einer Münze ; Ziehen von Kugel (Lottozahlen) ; Glücksrad drehen ; Spielwürfel werfen

Beispiel: Ein Spielwürfel wird 25-mal geworfen: Treffer (T) wäre z.B. eine Sechs, eine Niete (N) wäre dann eine 1, 2, 3, 4 oder 5.

Ergebnisse:

Strichliste

Augenzahl	Anzahl
6	||||
keine 6	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |

Tabelle

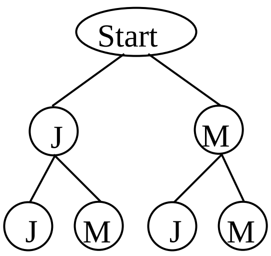
Augenzahl	Anzahl
6	4
keine 6	21

delta6 Seite 62

Ergebnismenge

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu einer **Ergebnismenge** (man spricht auch von einem **Ergebnisraum)** zusammen.
Diese wird häufig mit dem Buchstaben Ω bezeichnet.

Beispiel:
Geschwisterfolge bei zwei Kindern (**J**unge/**M**ädchen)
Mögliche Ergebnisse: JJ; JM; MJ; MM
Ergebnismenge Ω = {JJ; JM; MJ; MM}



Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments lassen sich durch ein **Baumdiagramm** übersichtlich darstellen.

Ein Zufallsexperiment nennt man **einstufig** oder **mehrstufig**, je nachdem, ob man es in einem oder mehreren Schritten durchführt.

delta8 Seite 92 ff

delta9 Seite 144 ff

Ereignisse

Werden bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammengefasst, so erhält man ein **Ereignis.**

Die Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse.**

Ein Ereignis, für das alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments günstig sind, heißt **sicheres Ereignis.**

Ein Ereignis, das bei diesem Zufallsexperiment nicht eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis.**

Alle für ein Ereignis E ungünstigen Ergebnisse bilden zusammen dessen **Gegenereignis** $\overline{E}$.

Beispiele:

Experiment: Werfen eines Würfels
Ereignis E_1: Werfen einer geraden Augenanzahl

Die Augenanzahlen 2 und 4 und 6.
$E_1 = \{ 2; 4; 6\}$

E_2: Werfen einer natürlichen Zahl
$E_2 = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$

E_3: Werfen der Zahl -5
$E_3 = \{ \} = \varnothing$

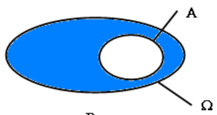
Gegenereignis zu E_1
$\overline{E_1}$: Werfen einer ungeraden Augenanzahl
$\overline{E_1} = \{ 1; 3; 5\}$

delta8
Seite 94 ff

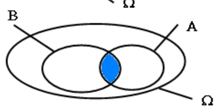
Zusammengesetzte Ereignisse

Ereignisse werden häufig in Mengenform angegeben.

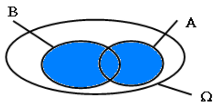
Gegenereignis von A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$



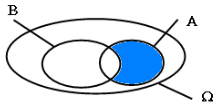
Ereignis A **und** Ereignis B: $A \cap B$



Ereignis A **oder** Ereignis B: $A \cup B$



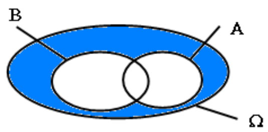
Ereignis A **ohne** Ereignis B
(Ereignis A **und nicht** Ereignis B): $A \setminus B = A \cap \overline{B}$



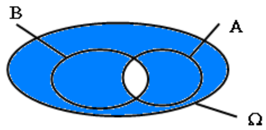
NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 177ff

Gesetze von de Morgan

Weder Ereignis A **noch** Ereignis B: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$



Nicht beide Ereignisse A und B **gleichzeitig**: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 178ff

Relative Häufigkeit

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 25-mal) geworfen und es erscheint dabei k-mal (z.B. 4-mal) die Augenzahl 6.

Absolute Häufigkeit der „Sechser": 4 (Anzahl der Sechser")

Relative Häufigkeit der „Sechser": $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$ (Anteil der „Sechser")

Allgemein: **Relative Häufigkeit**

$$\frac{k}{n} = \frac{\text{"Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eingetreten ist"}}{\text{"Anzahl, wie oft das Experiment durchgeführt wurde"}}$$

delta6
Seite 64

delta8
Seite 96 ff

Wahrscheinlichkeit

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so ändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis E eintritt, schließlich nur noch sehr wenig:

Die relative Häufigkeit des Ereignisses E schwankt um eine feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses E.

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ist ein **Schätzwert** für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Beispiel: Experiment: Werfen einer Münze

Anzahl n der Würfe	Anzahl k der „Adler"	Relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit)
100	48	0,48 = 48 %
1000	517	0,517 = 51,7 %

delta8
Seite 96 ff

Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente.**

Sind bei einem Laplace-Experiment 2 (3; 4; 5; 6; ... n) verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse: $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};...;\frac{1}{n})$.

Dementsprechend nennt man einen idealen Spielwürfel einen **Laplace-Würfel** (L-Würfel), eine ideale Münze **Laplace-Münze** (L-Münze).

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E direkt berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{„Anzahl der günstigen Ergebnisse"}}{\text{„Anzahl aller möglichen Ergebnisse"}}$$

delta8
Seite 102 ff

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Erfüllt eine Funktion $P: A \to P(a)$ mit $A \subset \Omega$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen, (Axiome von Kolmogorow), so heißt sie **Wahrscheinlichkeitsverteilung**:

Axiom I: $P(A) \geqq 0$

Axiom II: $P(\Omega) = 1$

Axiom III: Wenn $A \cap B = \{\ \}$, dann muss gelten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P(A) heißt **Wahrscheinlichkeit von A**.

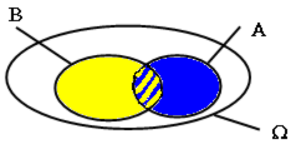
NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 174ff

Additionssatz

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 180ff

Für zwei Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Arithmetisches Mittel

delta7
Seite 128

Das **arithmetische Mittel** berechnet man so:

Man addiert alle Einzelwerte und teilt diesen Summenwert durch die Anzahl aller Einzelwerte.

Beispiel: Einzelwerte 12 kg , 14,3 kg , 15,1 kg und 15,9 kg
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{12kg + 14{,}3kg + 15{,}1kg + 15{,}9kg}{4} = \frac{57{,}3kg}{4} = 14{,}325kg \approx 14{,}3kg$$

Zählprinzip

delta8
Seite 98 ff

Es sollen z. B. vier Stellen besetzt werden.
Gibt es für die Besetzung der 1.Stelle 2. Stelle 3. Stelle 4. Stelle
n_1 n_2 n_3 n_4
verschiedene Möglichkeiten,
so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$ verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

Beispiel: Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 3; 5; 7; 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern…

a) genau einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

Null darf nicht vorne stehen!

Bleiben noch 4 mögliche …

b) auch mehr als einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$

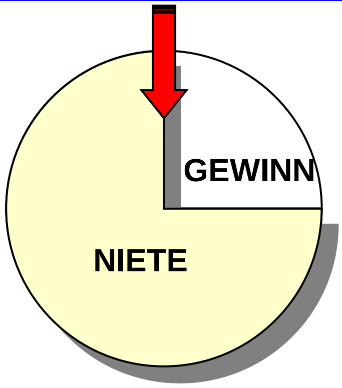
Beispiel: Auf wie viele Arten kann man vier verschiedene Bücher nebeneinander in ein Regal stellen?

Lösung: Anzahl der Möglichkeiten: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Baumdiagramme

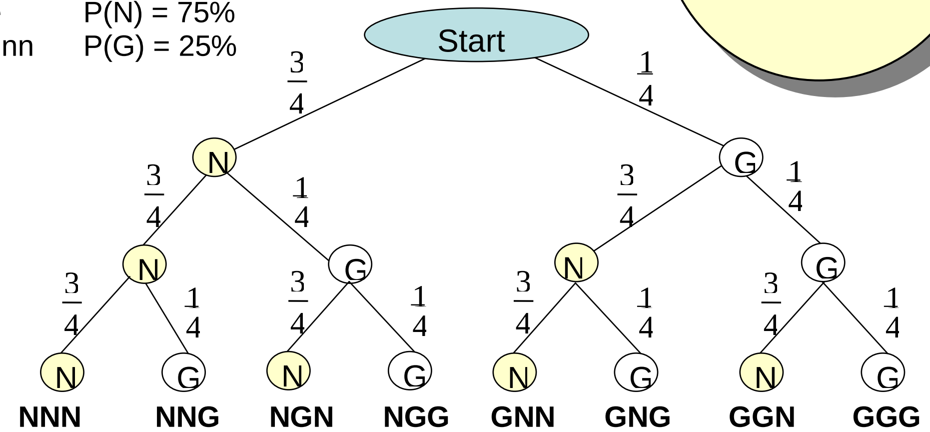
Besonders bei mehrstufigen Zufallsexperimenten sind Baumdiagramme zur Veranschaulichung sehr nützlich.

Beispiel: Ein Glücksrad (s. Bild) wird dreimal hintereinander gedreht.



Das entsprechende Baumdiagramm mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten sieht so aus:

N: Niete P(N) = 75%
G: Gewinn P(G) = 25%



Ergebnismenge Ω = { NNN, NNG, NGN, NGG, GNN, GNG, GGN, GGG }

Pfadregeln

1) Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an Zweigen von einem Knoten aus ergibt jeweils 1.

   Im Beispiel gilt immer: $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

2) Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

   Im Beispiel: $\mathrm{P(NNN)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}\approx 42{,}2\%$

   $\mathrm{P(GNG)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}\approx 4{,}7\%$

3) Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten derjenigen **Ergebnisse**, die zu diesem Ereignis führen.
   Im Beispiel:

   $\mathrm{P(''\underline{Genau\ ein\ Niete}'')}=\mathrm{P(\underline{GGN;GNG;NGG})}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}\approx 14{,}1\%$

delta9
Seite 144 ff

Urnenmodelle

Viele Zufallsexperimente kann man durch ein so genanntes **Urnenmodell simulieren:**

Eine Urne enthält verschiedenfarbige, aber sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus nun n-mal hintereinander jeweils eine Kugel „blind“.

a) **Ziehen mit Zurücklegen**: Nach dem Notieren der Farbe wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit nicht!)

b) **Ziehen ohne Zurücklegen**: Die gezogene Kugel wird **nicht** wieder in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit ständig!)

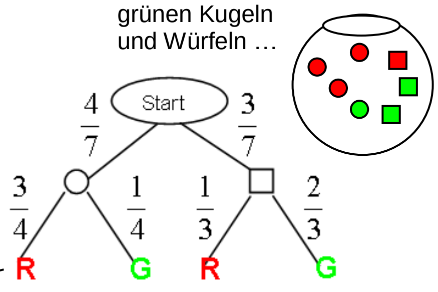
delta9
Seite 148 ff

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unter der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass vorher bereits das Ereignis B eingetreten ist, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bsp.: Urne mit roten bzw. grünen Kugeln und Würfeln …



Nach den Pfadregeln gilt: $P(R \cap O) = P(O) \cdot P_O(R) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$ $\quad P(R \cap \square) = P(\square) \cdot P_\square(R) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

Beispiele:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn eine Kugel (O) gezogen wurde?

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{7} : \frac{4}{7} = \frac{3}{4}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn ein Würfel (□) gezogen wurde?

$$P_\square(R) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{7} : \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$$

delta10
Seite 100 ff

Vierfeldertafel

In einer **Vierfeldertafel** kann man die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen darstellen, wenn zwei Merkmale mit je zwei Ausprägungen betrachtet werden.

Beispiel:

$$P_{\text{Männlich}}(B) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{16\%}{59\%} \approx 27\%$$

	M	W	
B	16%	12%	28%
$\overline{B}$	43%	29%	72%
	59%	41%	100%

M Männlich
W Weiblich
B Brillenträger

delta10
Seite 92 ff

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig,** wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Sind zwei Ereignisse A und B unabhängig, so ist die zugehörige Vierfeldertafel eine **Multiplikationstafel.**

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Achtung Unterschied:

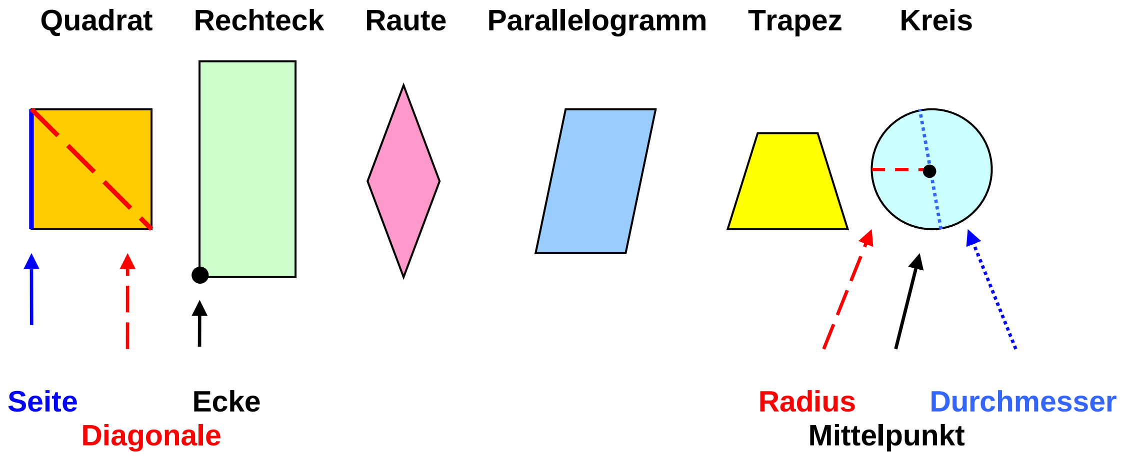
- „**Wahrscheinlichkeit** von A und B“: $P(A \cap B)$
  sowie „**Bedingter Wahrscheinlichkeit von B unter A**“ $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- „**Unvereinbarkeit**“ von A und B: $A \cap B = \{\,\}$
  sowie „**Unabhängigkeit**“ von A und B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 182ff

Geometrische Grundfiguren

GEOMETRIE

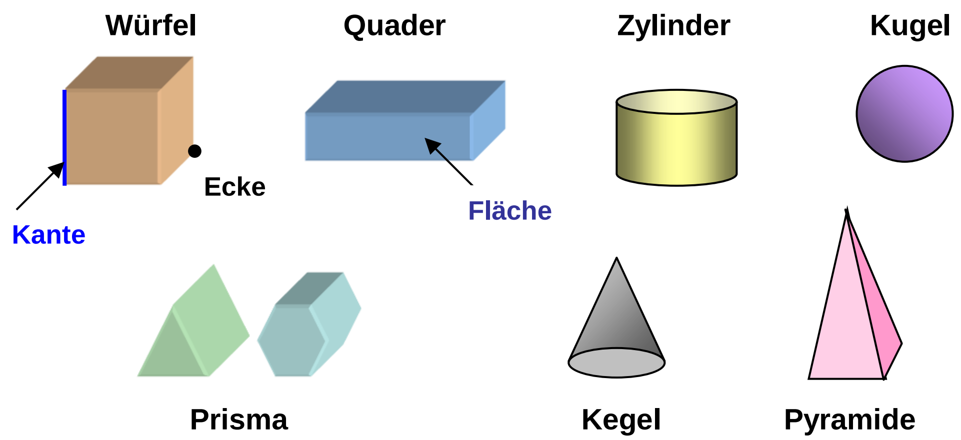
delta5
Seite 72



Geometrische Grundkörper

GEOMETRIE

delta5
Seite 72



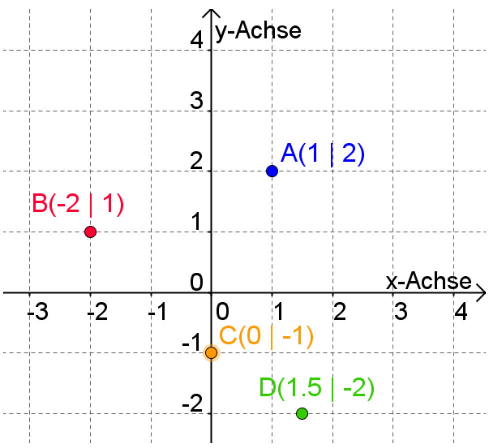
Koordinaten-system

GEOMETRIE

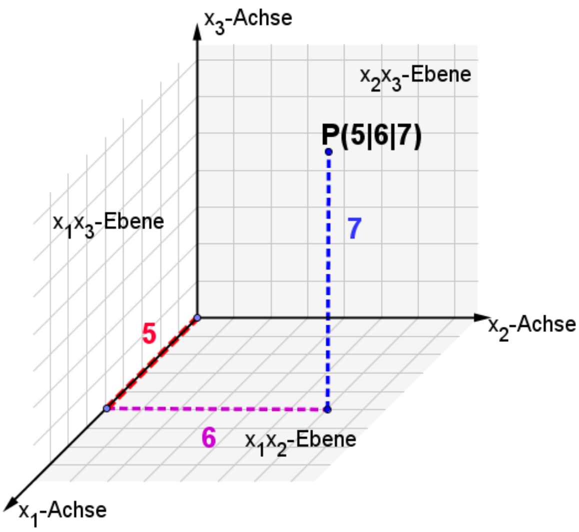
delta5
Seite 86

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 90ff

Zweidimensionales Koordinatensystem:



Dreidimensionales Koordinatensystem:



Strecke, Gerade, Halbgerade

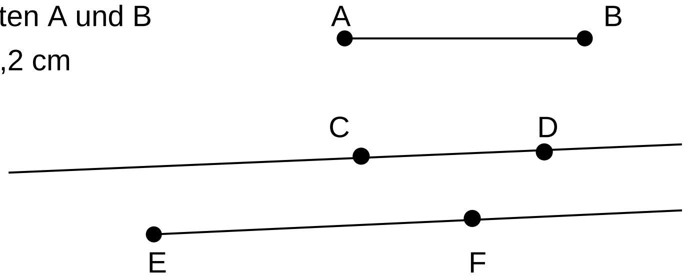
GEOMETRIE

delta5
Seite 74

Strecke **[AB]** mit den Endpunkten A und B
und der Streckenlänge $\overline{AB}$ = 3,2 cm

Gerade **CD**

Halbgerade (Strahl) **[EF**
mit Anfangspunkt E



Senkrecht, parallel

GEOMETRIE

delta5
Seite 76

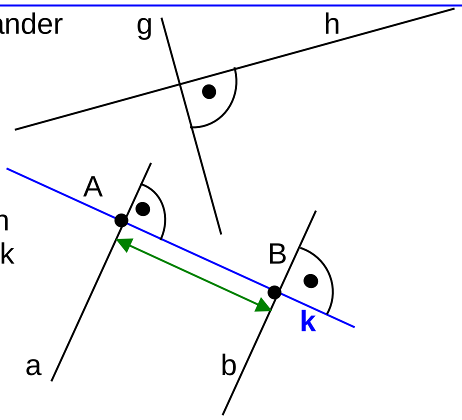
Geraden, Halbgeraden oder Strecken, die miteinander einen rechten Winkel bilden, stehen **aufeinander senkrecht.**

Schreibweise: g ⊥ h

Zwei Geraden a und b (der Zeichenebene) heißen **zueinander parallel**, wenn es eine dritte Gerade k gibt, die auf jeder der beiden senkrecht steht.

Schreibweise: a ∥ b

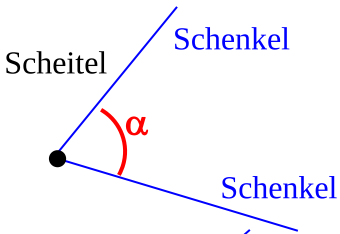
Abstand d der Geraden a und b: **d =** $\overline{AB}$

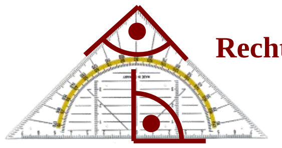


Winkel (I)

GEOMETRIE

delta5
Seite 82

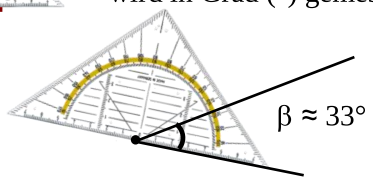


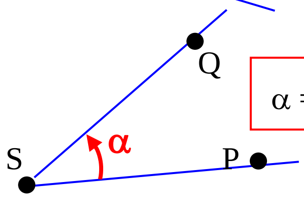


Rechte Winkel (90°) am Geodreieck

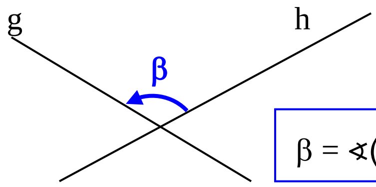
Die Größe eines Winkels wird in Grad (°) gemessen.

Winkel messen:





α = ∢PSQ

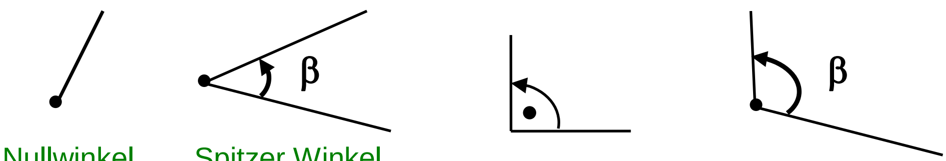


β = ∢(h;g)

Winkel (II) Bezeichnungen

GEOMETRIE

delta5
Seite 82

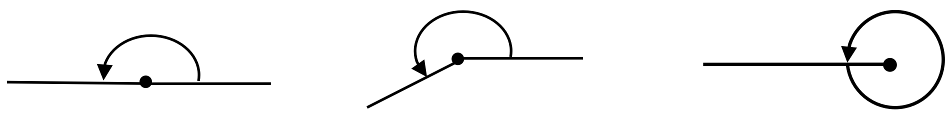


Nullwinkel
β = 0°

Spitzer Winkel
0°< β < 90°

Rechter Winkel
β = 90°

Stumpfer Winkel
90°< β < 180°



Gestreckter Winkel
β = 180°

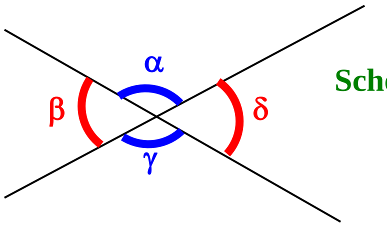
Überstumpfer Winkel
180° < β < 360°

Vollwinkel β = 360°

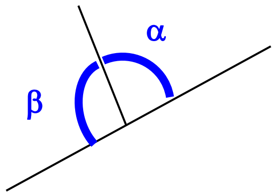
Winkel (III)

Gesetze

GEOMETRIE

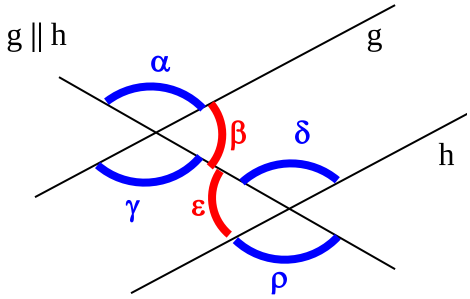


Scheitelwinkel sind gleich groß: $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$



Nebenwinkel ergeben zusammen 180°: $\alpha + \gamma = 180°$

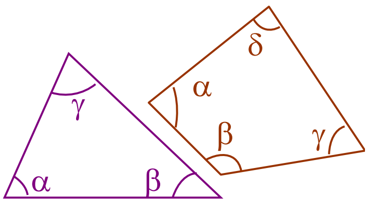
delta7
Seite 38



Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß: $\alpha = \rho$ oder $\gamma = \delta$ oder $\beta = \varepsilon$

Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß: $\alpha = \delta$ oder $\gamma = \rho$

delta7
Seite 42



Die **Winkelsumme** der Innenwinkel …

…jedes Dreiecks beträgt 180°; $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

…jedes Vierecks beträgt 360°; $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$

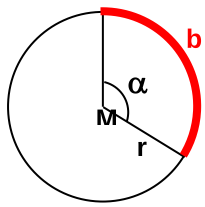
…jedes n-Ecks beträgt (n-2) ·180° (n>2)

delta7
Seite 46 / 52

Bogenmaß

GEOMETRIE

Der Wert des Quotienten aus Bogen- und Radiuslänge $\frac{b}{r}$ eignet sich als Winkelmaß, $\frac{b}{r}$ ist eine reelle Zahl.
Statt den Winkel a in Grad anzugeben, kann man die Maßzahl der zugehörigen Bogenlänge am Einheitskreis (r = 1 LE) verwenden.



Dieses Winkelmaß heißt **Bogenmaß,**

Umrechnung : $\frac{\pi\alpha}{180°}$

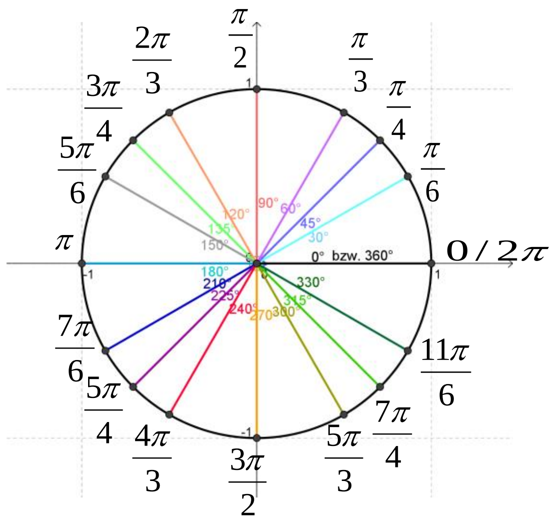


Tabelle:

0°	0 π	0
30°	1/6 π	0,5236
45°	1/4 π	0,7854
60°	1/3 π	1,0472
90°	1/2 π	1,5708
120°	2/3 π	2,0944
135°	3/4 π	2,3562
150°	5/6 π	2,618
180°	π	3,1416
210°	1 1/6 π	3,6652
225°	1 1/4 π	3,927
240°	1 1/3 π	4,1888
270°	1 1/2 π	4,7124
300°	1 2/3 π	5,236
315°	1 3/4 π	5,4978
330°	1 5/6 π	5,7596
360°	2 π	6,2832

delta10
Seite 10 ff

Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen; die Faltkante heißt dann **Symmetrieachse**.

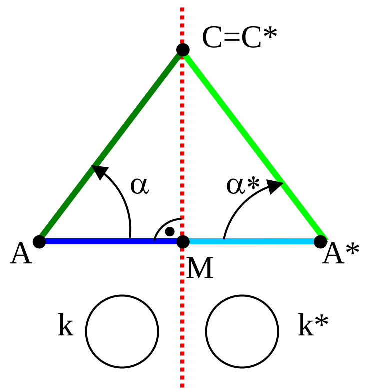
Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.

$$\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$$
$$r = r^*$$

Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.



Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

$$\overline{AM} = \overline{MA^*}$$

Achsen-symmetrie

GEOMETRIE

delta5
Seite 92

delta7
Seite 10 ff

Wenn eine Figur bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z **(Symmetriezentrum)** mit sich zur Deckung kommt, so heißt diese Figur **punktsymmetrisch.**

Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und zueinander parallel.

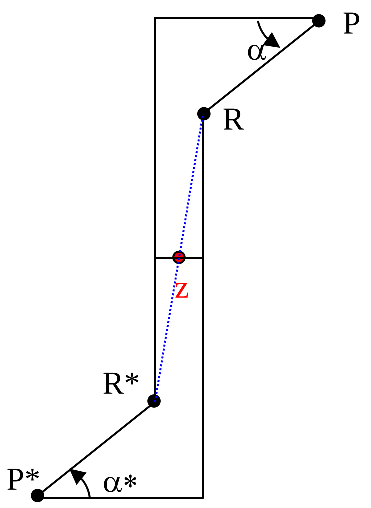
$$\overline{PR} = \overline{P^*R^*}$$
$$\overline{PR} \parallel \overline{P^*R^*}$$

Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß und haben gleichen Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.

$$\overline{ZR} = \overline{ZR^*}$$

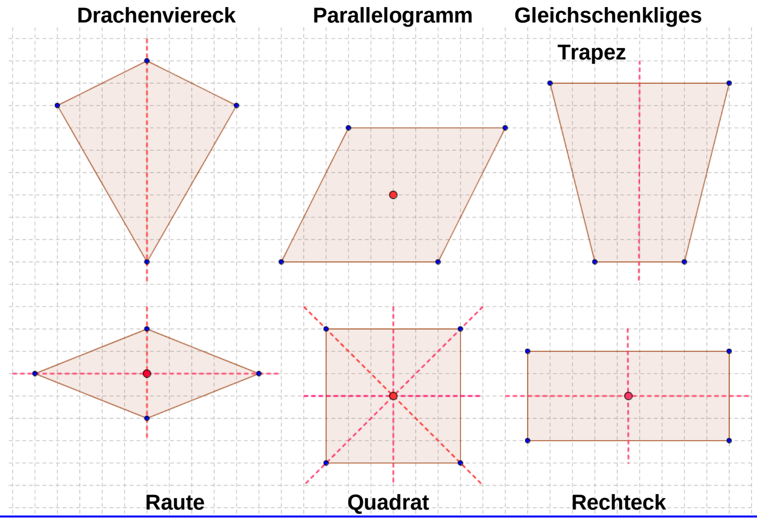


Punkt-symmetrie

GEOMETRIE

delta5
Seite 92

delta7
Seite 24 ff

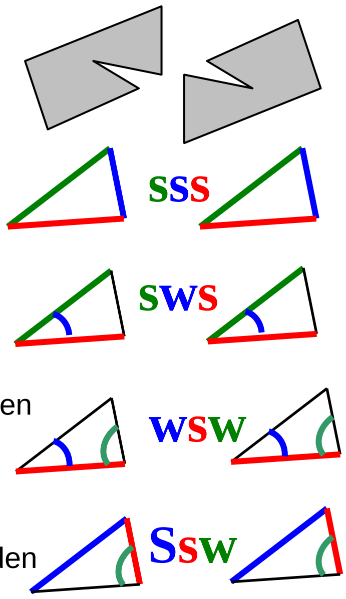


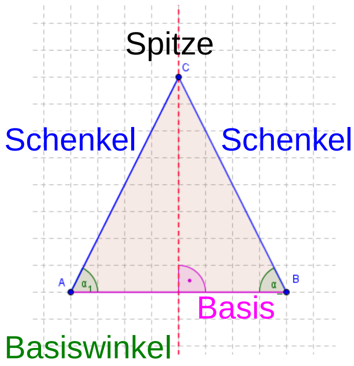
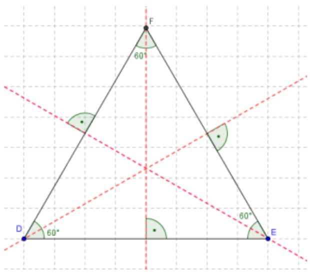
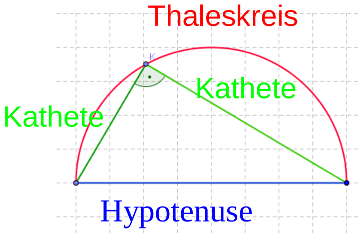
Symmetrische Vierecke

GEOMETRIE

delta5
Seite 72

delta7
Seite 28 ff

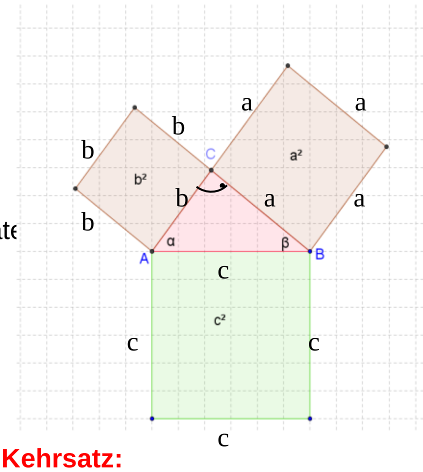
Lassen sich zwei Figuren vollständig miteinander zur Deckung bringen, so heißen sie **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent.** **Kongruenzsätze für Dreiecke** Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie… ✓ in den Längen der drei Seiten übereinstimmen **(sss-Satz).** ✓ in den Längen von zwei Seiten und in der Größe von deren Zwischenwinkel übereinstimmen **(sws-Satz).** ✓ in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen **(wsw-Satz).** ✓ in den Längen zweier Seiten und in der Größe des der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels übereinstimmen **(SsW-Satz).**  	**Kongruenz** **GEOMETRIE** delta7 Seite 148 ff

 Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen **gleichschenklig.** **Eigenschaften:** ✓ Zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel). ✓ Die der Basis anliegenden Winkel (Basiswinkel) sind gleich groß. ✓ Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze und halbiert die Basis rechtwinklig.  **Gleichseitige** Dreiecke haben drei gleich lange Seiten. **Eigenschaften:** ✓ Alle Innenwinkel messen 60°. ✓ Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen; sie halbieren die Innenwinkel und halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig.  Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, heißen **rechtwinklig.** **Eigenschaften:** ✓ Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser **(Thaleskreis).** ✓ Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite [AB] als Durchmesser liegt, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig und C der Scheitel des rechten Winkels.	**Besondere Dreiecke** delta7 Seite160 ff **GEOMETRIE** delta7 Seite 166 ff

Ein alter und berühmter Satz aus der Geometrie zeigt die Beziehung zwischen der Länge der Hypotenuse und den Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck:

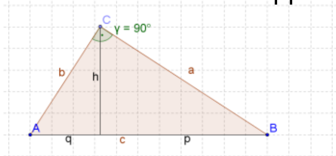
Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

In Worten :
In einem rechtwinkligen Dreieck haben die beiden Quadrate über den beiden Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse!



Kathetensatz : $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$

Höhensatz : $h^2 = q \cdot p$



Satz des Pythagoras – Kehrsatz:
Gilt für die Längen a, b und c in einem Dreieck die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Satz von Pythagoras

Höhensatz

Kathetensatz

GEOMETRIE

delta9
Seite 29 ff

$$\textbf{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}$$

$$\textbf{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\textbf{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

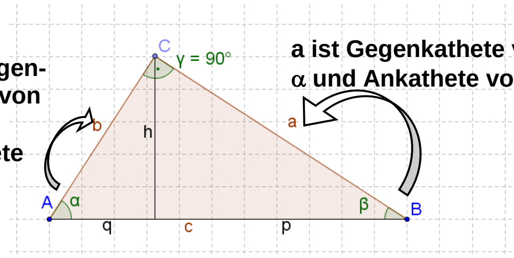
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

b ist Gegenkathete von β und Ankathete von α

a ist Gegenkathete von α und Ankathete von β



Tangens…
Sinus…
Kosinus…

…eines Winkels

GEOMETRIE

delta9
Seite 125 ff

Es gilt: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **und** $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Außerdem: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ **und** $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

φ	0° oder 360°	30°	45°	60°	90°
sin φ	$0 = 1/2\sqrt{0}$	$1/2 = 1/2\sqrt{1}$	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	$1 = 1/2\sqrt{4}$
cos φ	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0
tan φ	0	$1/3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

φ	135°	180°	225°	270°	315°
sin φ	$1/2\sqrt{2}$	0	$-1/2\sqrt{2}$	-1	$-1/2\sqrt{2}$
cos φ	$-1/2\sqrt{2}$	-1	$-1/2\sqrt{2}$	0	$1/2\sqrt{2}$
tan φ	-1	0	1	-	-1

tan, sin, cos

Beziehungen

Besondere Winkel

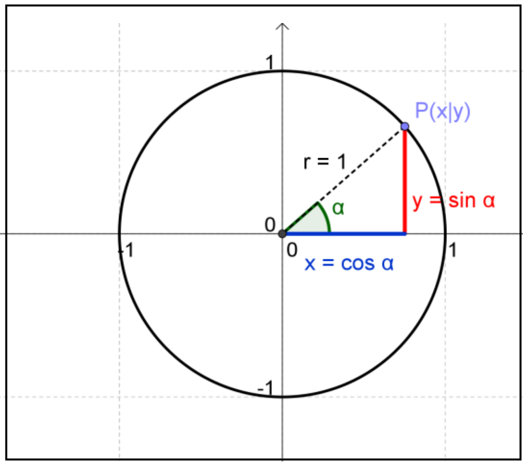
delta9
Seite 134 ff

delta10
Seite 38 ff

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Am Einheitskreis kann man die Werte von **sin α** und **cos α** für beliebig große Winkel definieren:

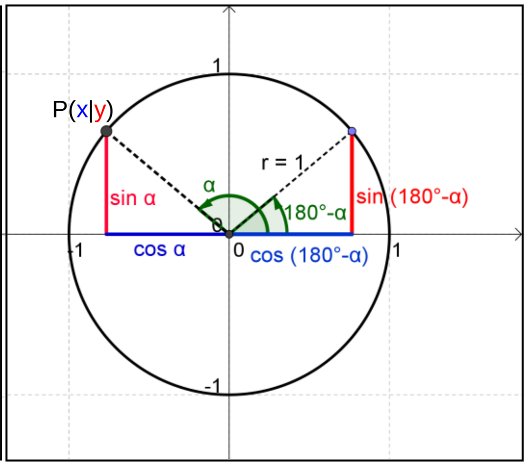
I. Quadrant, es gilt 0° < α < 90°



$$x = \cos\alpha = \frac{x}{r} = x$$

$$y = \sin\alpha = \frac{y}{r} = y$$

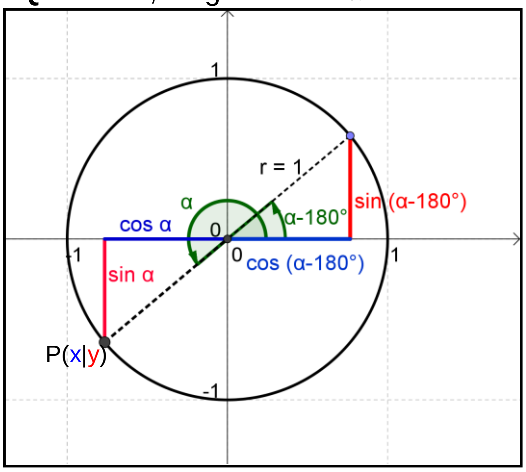
II. Quadrant, es gilt 90° < α < 180°



$$x = \cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$$

$$y = \sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$$

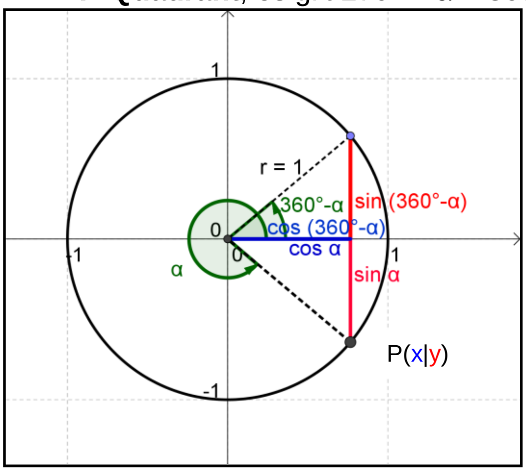
III. Quadrant, es gilt 180° < α < 270°



$$x = \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$$

$$y = \sin\alpha = -\sin(\alpha - 180°)$$

IV. Quadrant, es gilt 270° < α < 360°



$$x = \cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$$

$$y = \sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$$

Für negative Winkel gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

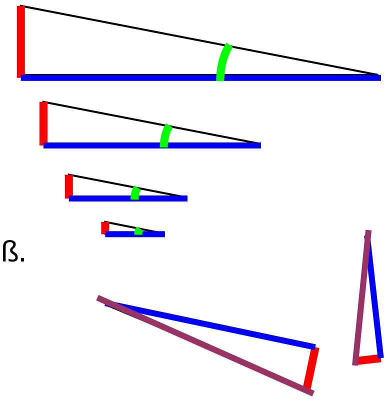
Für Drehungen über 360° gilt: $\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$ und
$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$ $(k \in \mathbb{N})$

GEOMETRIE

delta10
Seite 38 ff

Ähnlichkeit

Wird eine Originalfigur im Maßstab a ($a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$) vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur und die Originalfigur zueinander **ähnlich**. Der Maßstab a heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.

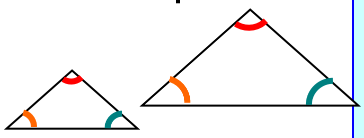


Für zueinander ähnliche Figuren gilt:

- Einander entsprechende **Winkel** sind stets gleich groß.
- Längenverhältnisse einander entsprechender Strecken sind stets gleich.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in allen **Längenverhältnissen entsprechender Seiten** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in den Größen aller **Winkel** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

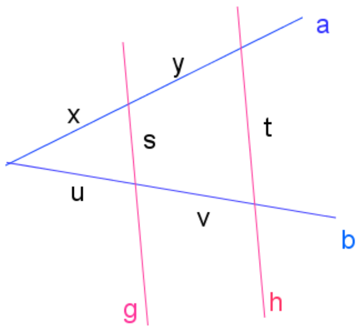


GEOMETRIE

delta8
Seite 160 ff

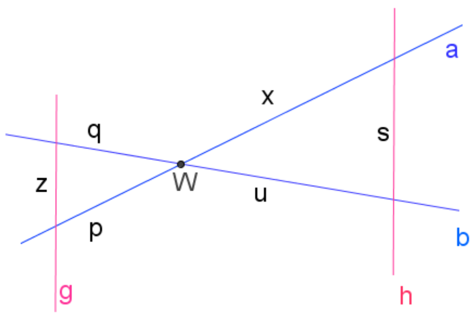
Strahlensätze

1. Strahlensatz
Wenn zwei Halbgeraden bzw. zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen irgendwelcher zwei Abschnitte auf der einen (Halb-) Geraden ebenso wie die Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der anderen (Halb-) Geraden.



Beispiel: $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ oder $\frac{x}{p} = \frac{u}{q}$

***2.* Strahlensatz**
Wenn zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen der Parallelstrecken wie die Längen der vom Punkt W bis zu ihnen hin verlaufenden Abschnitte auf der einen Geraden:



Beispiel: : $\frac{s}{t} = \frac{u}{u+v}$ oder $\frac{s}{z} = \frac{x}{p}$

Es gilt auch der **Kehrsatz des 1. Strahlensatzes:**
Werden zwei Geraden a und b, die einander im Punkt W schneiden von zwei Geraden g und h so geschnitten, dass das Verhältnis der Längen irgendwelcher zweier Abschnitte auf der Geraden a stets gleich dem Verhältnis der Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der Geraden b ist, dann sind die beiden Geraden g und h zueinander parallel.

Der **Kehrsatz des *2.* Strahlensatzes** gilt **nicht.**

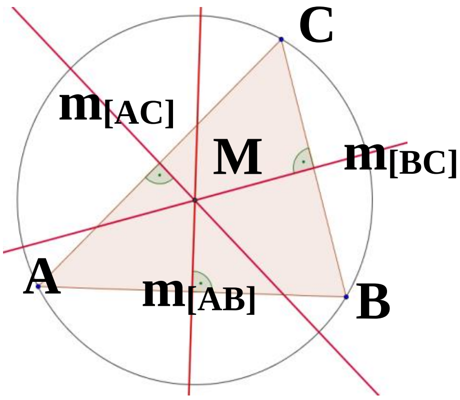
GEOMETRIE

delta8
Seite 145 ff

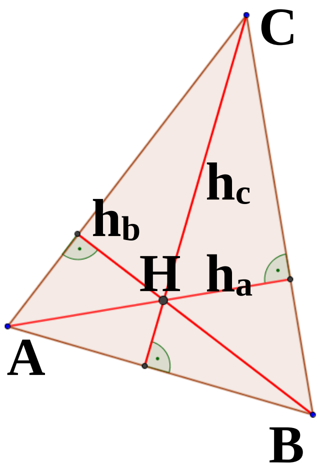
Besondere Linien im Dreieck

Alle Punkte (der Zeichenebene), die von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt sind, liegen
auf der **Mittelsenkrechten** (dem **Mittellot**) $m_{[AB]}$ ihrer Verbindungsstrecke.

Die drei Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$, $m_{[BC]}$ und $m_{[CA]}$ eines Dreiecks ABC schneiden einander stets in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des **Umkreises** dieses Dreiecks. Die Punkte A, B und C sind von M gleich weit entfernt.



delta7
Seite180



Eine Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet, heißt **Höhe** dieses Dreiecks.

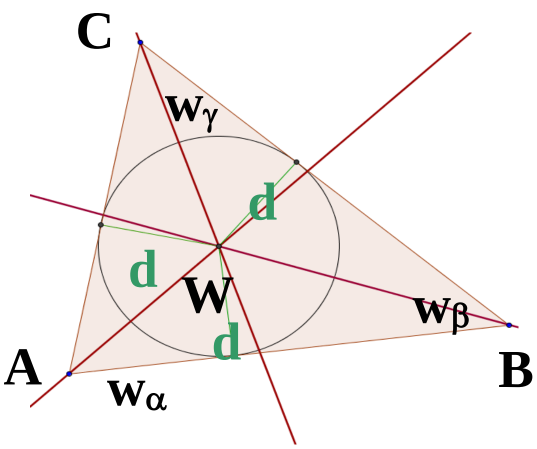
Jedes Dreieck besitzt somit drei Höhen h_a, h_b und h_c; sie schneiden einander in einem Punkt H.

GEOMETRIE

delta7
Seite 184

Eine Gerade, die einen Dreiecksinnenwinkel halbiert, heißt **Winkelhalbierende** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Winkelhalbierende w_α w_β und w_γ ; sie schneiden einander in einem Punkt W, der von den drei Seiten den gleichen Abstand d besitzt.
W ist der Mittelpunkt des **Innkreises**.



delta7

Seite 188

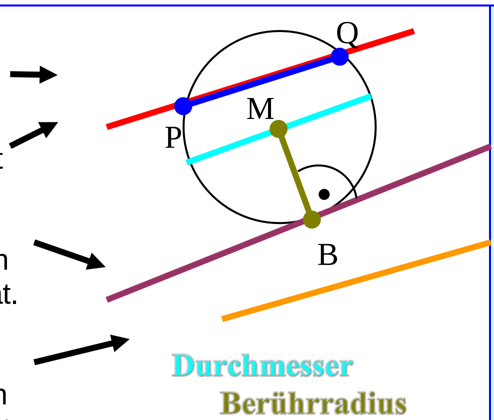
Kreis und Gerade

Eine Gerade heißt **Sekante** eines Kreises, wenn sie diesen Kreis in zwei Punkten schneidet.

Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt **Sehne ([PQ]).**

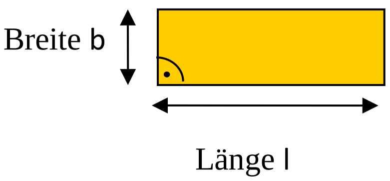
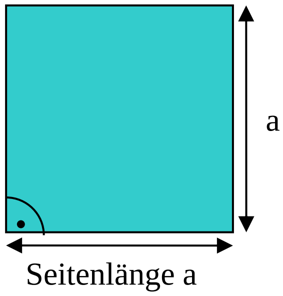
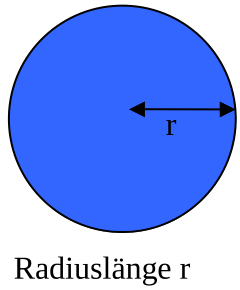
Eine Gerade heißt **Tangente** eines Kreises, wenn sie mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat.
Dieser Punkt heißt **Berührpunkt (B).**

Eine Gerade heißt **Passante** eines Kreises, wenn sie mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat.



GEOMETRIE

delta7
Seite 170 ff

Rechteck	**Quadrat**	**Kreis**
		

Umfangslänge:

$U_{Rechteck} = 2 \cdot l + 2 \cdot b$
$= 2 \cdot (l + b)$

$U_{Quadrat} = 4 \cdot a$

$U_{Kreis} = 2 \cdot r \cdot \pi$

Im Beispiel: $U_{Rechteck} = 2 \cdot 1\text{ cm} + 2 \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{8\text{ cm}}}$

$U_{Quadrat} = 4 \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{12\text{ cm}}}$

$U_{Kreis} = 2 \cdot 1{,}5\text{ cm} \cdot \pi \approx \underline{\underline{9{,}42\text{ cm}}}$

Kreiszahl

$\pi \approx 3{,}14159265$

Flächeninhalt:

$A_{Rechteck} = l \cdot b$
(„Länge mal Breite")

$A_{Quadrat} = a \cdot a = a^2$

$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Im Beispiel:

$A_{Rechteck} = 1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{3\text{ cm}^2}}$

$A_{Quadrat} = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{9\text{ cm}^2}}$

$A_{Kreis} = (1{,}5\text{cm})^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{7{,}07\text{ cm}^2}}$

Umfangslänge Flächeninhalt

GEOMETRIE

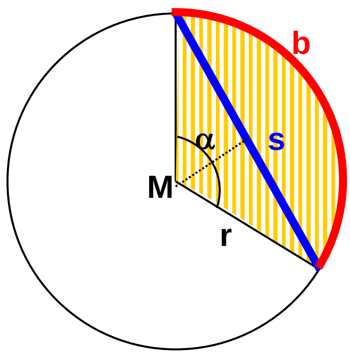
delta5 Seite 158

delta8 Seite 14ff

delta5 Seite 182

delta8 Seite 38ff

Kreisbogen Radiuslänge r Mittelpunkt M α: Mittelpunktswinkel



Bogenlänge $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{r\pi\alpha}{180°}$

Sehne $\frac{\frac{s}{2}}{r} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

(Herleitung über rechtwinkliges Dreieck)

Kreissektor $A_{Sektor} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$

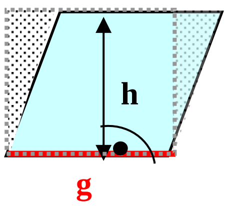
Umfangslänge Flächeninhalt

Kreisteile

GEOMETRIE

delta10 Seite 16 ff

Parallelogramm:
Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel.



Seitenlänge g („Grundseite") – zugehörige Höhe h

$\mathbf{A_{Parallelogramm} = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2}$

$\mathbf{U_{Parallelogramm} = 2g_1 + 2g_2 = 2(g_1 + g_2)}$

Umfangslänge Flächeninhalt

Parallelogramm

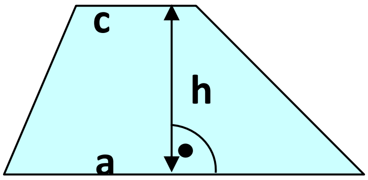
GEOMETRIE

delta6 Seite 130

Trapez:
Zwei gegenüberliegende Seiten („Grundseiten“) sind parallel (hier a und c).

Höhe h: Abstand der parallelen Grundseiten

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h = \frac{a+c}{2}\cdot h$$



Umfangslänge Flächeninhalt Trapez

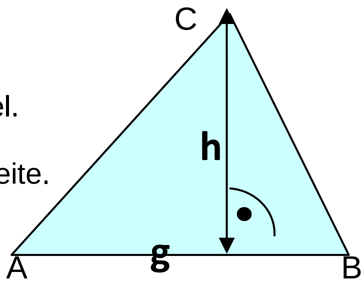
GEOMETRIE

delta6
Seite 138

Dreieck:

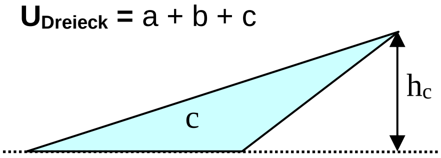
Drei Ecken – drei Seiten („Grundseiten“) – drei Innenwinkel.

Höhe h: Abstand der Ecke von der gegenüberliegenden Seite.



$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$U_{Dreieck} = a + b + c$



Bei manchen Dreiecken kann die Höhe auch außerhalb des Dreiecks liegen.

Umfangslänge Flächeninhalt Dreieck

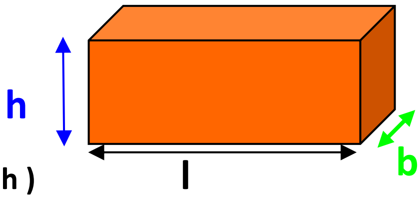
GEOMETRIE

delta6
Seite 136

Quader: Länge **l** , Breite **b** , Höhe **h**

Volumen: $V_{Quader} = \mathbf{l}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}$

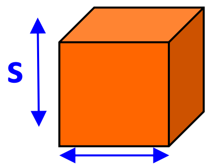
Oberflächeninhalt: $A_{Quader} = 2\cdot(\mathbf{l}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{l}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{h})$



Würfel: Kantenlänge s

Volumen: $V_{Würfel} = s\cdot s\cdot s = s^3$

Oberflächeninhalt: $A_{Würfel} = 6\cdot s^2$



Volumen und Oberflächeninhalt (I)

Quader

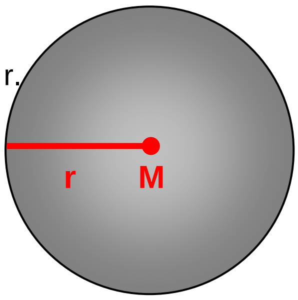
GEOMETRIE

delta6
Seite 146/152/160

Kugel mit der Radiuslänge **r** und dem Mittelpunkt **M**:
Alle Punkte auf der Kugel haben zum Mittelpunkt den Abstand r.

Volumen: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Oberflächeninhalt: $A = 4r^2\pi$



Volumen und Oberflächeninhalt (VI)

Kugel

GEOMETRIE

delta10
Seite 24 ff

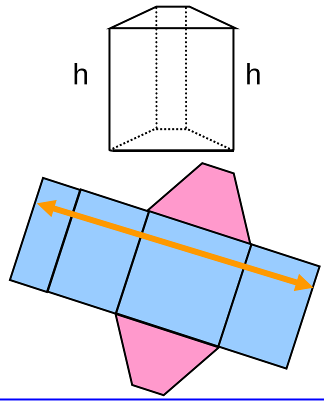
Gerades Prisma: Grundfläche und Deckfläche sind kongruente n-Ecke und zueinander parallel.

Mantel: Alle Seitenflächen (Rechtecke) zusammen.

Volumen: $V_{Prisma} = G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Prisma} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$

(**U: Umfangslänge**)



Volumen und Oberflächeninhalt (II)

Gerades Prisma

GEOMETRIE

delta9
Seite 166f

Gerader Kreiszylinder: Grundfläche und Deckfläche sind kongruente Kreise und zueinander parallel.

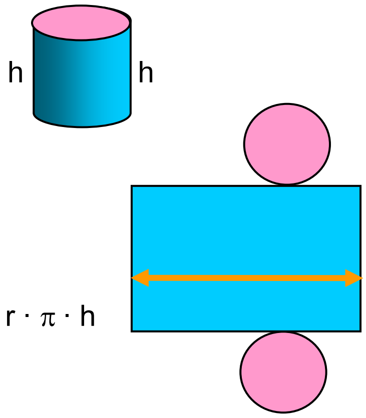
$G = r^2 \cdot \pi$

Mantel: Seitenfläche (Rechteck)

$M = U \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ (**U: Umfangslänge**)

Oberflächeninhalt: $A_{Zylinder} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen: $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Volumen und Oberflächeninhalt (III)

Gerader Kreiszylinder

GEOMETRIE

delta9
Seite 174ff

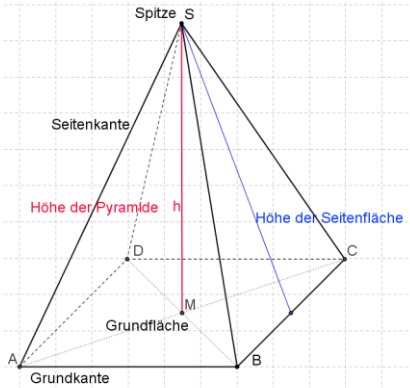
Pyramide: Grundfläche: Ein n-Eck (n>2)
Seitenflächen: n Dreiecke

Mantel: Alle Seitenflächen (Dreiecke) zusammen.

Gerade Pyramide: Alle Seitenkanten gleich lang.

Volumen: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Pyramide} = G + M$



Volumen und Oberflächeninhalt (IV)

Pyramide

GEOMETRIE

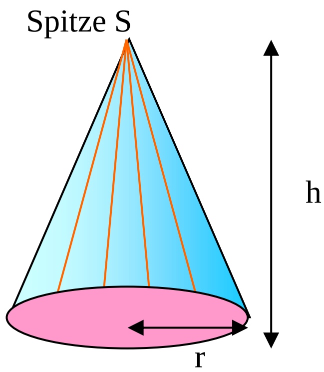
delta9
Seite 178ff

Gerader Kreiskegel: **Grundfläche:** Kreis $G = r^2\pi$
Mantel: Kreissektor $M = r\pi s$

(s: Länge der Mantellinien)

Volumen: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt: $A_{Kegel} = G + M$
$= r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$



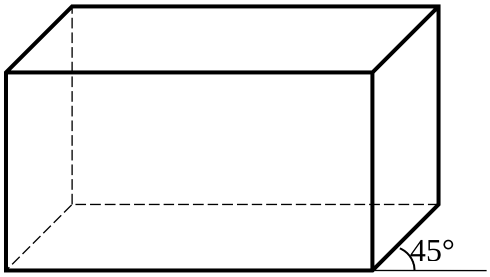
Volumen und Oberflächeninhalt (V)

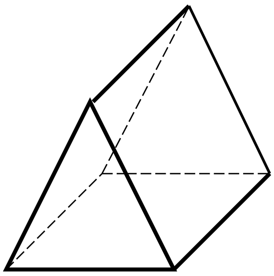
Gerader Kreiskegel

GEOMETRIE

delta9
Seite 188ff

Schrägbild





In einem **Schrägbild** wird ein Körper so gezeichnet, dass man ihn sich räumlich gut vorstellen kann.

Die „nach hinten" verlaufenden Quaderkanten werden schräg und verkürzt, aber zueinander parallel gezeichnet. Häufig trägt man sie unter einem Winkel von 45° und in halber Länge an.

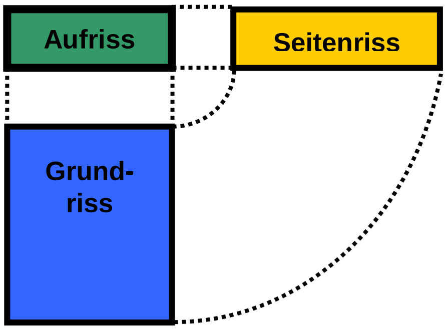
Unsichtbare Kanten werden gestrichelt eingezeichnet.

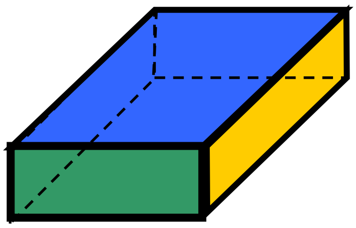
Um eine räumliche Vorstellung von einem Körper zu erhalten, stellt man ihn häufig aus mehreren verschiedenen Richtungen betrachtet dar:

Der **Grundriss** zeigt, wie der Körper (senkrecht) von oben betrachtet aussieht.

Der **Aufriss** zeigt, wie der Körper von vorne betrachtet aussieht.

Ein **Seitenriss** zeigt, wie der Körper von rechts (oder von links) betrachtet aussieht.





GEOMETRIE

delta6
Seite 148/150

delta9
Seite 164f

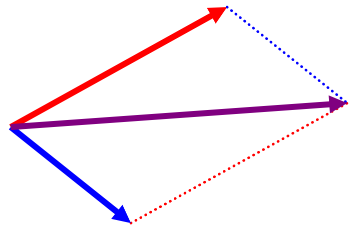
Addition und Subtraktion von Vektoren

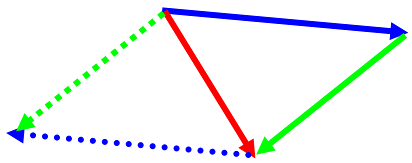
Die Addition bzw. Subtraktion zweier Vektoren ist wie folgt definiert:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

bzw. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$





KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 90ff

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation)

Für den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und die reelle Zahl r gilt: $r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Beispiel: **r=2, r=0,5 und r = -2** und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, dann

$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 0{,}5 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{und} -2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 100ff

Linear-kombination

Den Ausdruck $k_1 \cdot \vec{a_1} + k_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + k_n \cdot \vec{a_n}$ nennt man **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots \text{und } \vec{a_n}$.

Die reellen Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ nennt man **Koeffizienten**.

Beispiel: $2 \cdot \vec{u} - 8 \cdot \vec{v} + 3 \cdot \vec{w}$ ist eine Linearkombination von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$

Die Länge eines Repräsentanten des Vektors $\vec{u}$ bezeichnet man als Betrag von $\vec{u}$,

kurz: $\left|\vec{u}\right|$. Mit „Pythagoras" gilt: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ hat den Betrag $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

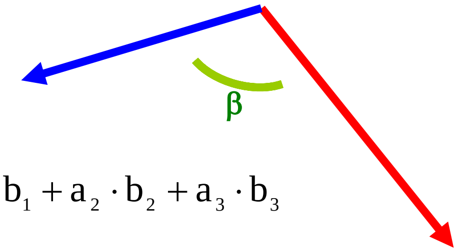
KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 101ff

Betrag

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 104ff

Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\beta$



Koordinatenform: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Winkel β: $\cos\beta = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Es gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \sqrt{14}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{52}$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{52}} = \frac{-16}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{52}} \approx -0{,}593 \Rightarrow \beta \approx 126{,}37°$$

Skalarprodukt

Winkel zwischen zwei Vektoren

KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 106ff

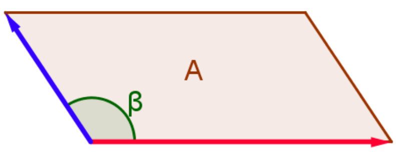
Für das **Vektorprodukt** zweier Vektoren gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (s.o.):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 - (-3) \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.



Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf, so gilt für die Fläche

$$A_{P.} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\beta$$

Beispiel (s.o.):

$$A = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + (-18)^2} = \sqrt{472} \approx 21{,}7$$

bzw. $A = \sqrt{14} \cdot \sqrt{52} \cdot \sin 126{,}37° \approx 21{,}7$

Vektorprodukt

Parallelogramm-fläche

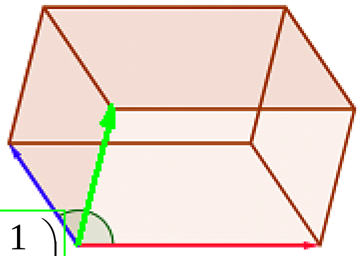
KOORDINATEN-GEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 111ff

Spatvolumen

Spannen die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein **Spat** auf, so gilt für das Volumen

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| \quad .$$



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel (s.o.):

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$$

$$= \left|\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| =$$

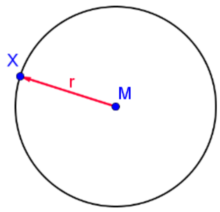
$$= \left| -12 + (-4) + 54 \right| = \left| 38 \right| = 38$$

KOORDINATENGEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 111ff

Kreis- und Kugelgleichung

Gleichung in **Vektordarstellung**: $(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$



Gleichung in **Koordinatendarstellung**:

Kreis: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

Kugel: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Beispiele: M(0 | 5 | –3) und r = 5 ergeben die folgende Kugelgleichung:

$$(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - (-3))^2 = 5^2$$

$$x_1{}^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 3)^2 = 5^2$$

M(1 | 7) und r = 3 ergeben die folgende Kreisgleichung:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 7)^2 = 3^2$$

KOORDINATENGEOMETRIE IM RAUM

NEU
Lambacher Schweizer 11
Seite 115ff