

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

Menge der natürlichen Zahlen

*Beispiele:*

5 ist eine natürliche Zahl

kurz:  $5 \in \mathbb{N}$  „5 ist ein Element von  $\mathbb{N}$ “

-2 ist keine natürliche Zahl

kurz:  $-2 \notin \mathbb{N}$  „-2 ist kein Element von  $\mathbb{N}$ “

0 ist keine natürliche Zahl

kurz:  $0 \notin \mathbb{N}$  „0 ist kein Element von  $\mathbb{N}$ “

Jede natürliche Zahl (außer der Zahl 1) hat eine natürliche Zahl als Vorgänger.

*Beispiel:*

*257 ist der Vorgänger von 258*

Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Nachfolger.

*Beispiel:*

*425 ist der Nachfolger von 424*

Somit gibt es unendlich viele natürliche Zahlen.

*Ebenso:*

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

Menge der natürlichen Zahlen und Null

Natürliche Zahlen

ZAHLEN

delta5  
Seite 10

$\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; \dots\}$

Menge der **ungeraden** natürlichen Zahlen

$\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; \dots\}$

Menge der **geraden** natürlichen Zahlen

$\{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; \dots\}$

Menge der **Quadratzahlen**

Multipliziert man eine natürliche Zahl mit sich selbst, erhält man eine Quadratzahl.

*Beispiele:*

$2 \cdot 2 = 4$  oder  $9 \cdot 9 = 81$

*Beispiele für Vielfachenmengen:*

$V_5 = \{5; 10; 15; 20; 25; \dots\}$

Menge aller Vielfachen der Zahl 5

$V_7 = \{7; 14; 21; 28; 35; \dots\}$

Menge aller Vielfachen der Zahl 7

*Beispiele für Teilmengen:*

$T_8 = \{1; 2; 4; 8\}$

Menge aller Teiler der Zahl 8

$T_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Menge aller Teiler der Zahl 24

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; \dots\}$

Menge der **Primzahlen**

Jede Primzahl hat **genau zwei** Teiler, 1 und sich selbst.

Jede natürliche Zahl (außer 1 und den Primzahlen) kann man als Produkt von Primzahlen schreiben.

*Beispiele:*

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

„**Primfaktorzerlegung**“

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$

Zahlen mit besonderen Eigenschaften

ZAHLEN

delta5  
Seite 12

Der Wert, den eine Ziffer hat, hängt von der Stelle ab, an der sie innerhalb einer Zahl steht. Daher spricht man von einem **Stellenwertsystem**.

*Beispiel:*

Die Zahl 517204201

| Zehnerstufen | Mrd | HM | ZM       | M | HT       | ZT | T | H        | Z | E        |
|--------------|-----|----|----------|---|----------|----|---|----------|---|----------|
| Ziffer       |     | 5  | <b>1</b> | 7 | <b>2</b> | 0  | 4 | <b>2</b> | 0 | <b>1</b> |

Die Zahlen 1; 10; 100; 1000; ... nennt man **Stufenzahlen** unseres Zehnersystems.

Zehnersystem (Dezimalsystem)

ZAHLEN

delta5  
Seite 16

Die römischen Zahlzeichen haben unabhängig davon, an welcher Stelle sie stehen, immer den gleichen Wert (also **kein** Stellenwertsystem):

I = 1    V = 5    X = 10    L = 50    C = 100    D = 500    M = 1000

*Beispiele:* 31 = XXXI    75 = LXXV    1362 = MCCCLXII

Steht ein kleineres Zeichen vor einem größeren, so wird subtrahiert.

*Beispiele:* 4 = IV    29 = XXIX    96 = XCVI

Römische Zahlzeichen

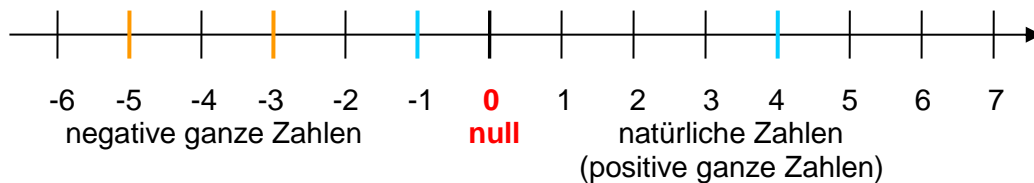
ZAHLEN

delta5  
Seite 26

$\mathbb{Z} = \{ \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots \}$

Menge der ganzen Zahlen

Zahlengerade:



**Anordnung** der ganzen Zahlen:

Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer, deren Bildpunkt auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.

*Beispiel:*  $-5 < -3$  und  $-1 < 4$     bzw.     $-3 > -5$  und  $4 > -1$

**Betrag** einer ganzen Zahlen: Er gibt die Entfernung des Bildpunktes einer Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden an.

*Beispiel:*  $-5$  und  $+5$  haben beide den Betrag 5  
(Man nennt  $-5$  **Gegenzahl** von  $+5$  und umgekehrt.)

Der Betrag von  $-17$  ist 17, kurz:  $|-17| = 17$      $|+3| = 3$      $|0| = 0$     ...

Allgemein:  $|a| = a$ , wenn a positiv ist  
 $|a| = 0$ , wenn a Null ist  
 $|a| = -a$ , wenn a negativ ist

Ganze Zahlen

ZAHLEN

delta5  
Seite 52

Wenn man ein Ganzes in 2; 3; 4; 5 ... gleich große Teile zerlegt, so erhält man Bruchteile, und zwar **zwei Halbe**, **drei Drittel**, **vier Viertel**, **fünf Fünftel**...

Man schreibt für einen solchen Teil  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$



und nennt diese Brüche **Stammbrüche**.

Stammbrüche

ZAHLEN

delta6  
Seite 10

Zerlegt man ein Ganzes z. B. in acht gleich große Teile und fasst dann fünf dieser

Teile zusammen, so erhält man den Bruch  $\frac{5}{8}$ .



**5** ← **Zähler** (Er gibt an, wie viele dieser Teile zusammengefasst werden.)

— ← Bruchstrich

**8** ← **Nenner** (Er gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird.)

Brüche

ZAHLEN

delta6  
Seite 12

**Scheinbrüche:** Ihr Zähler ist 0 oder ein Vielfaches ihres Nenners.

*Beispiele:*  $\frac{0}{3}(=0)$ ;  $\frac{2}{2}(=1)$ ;  $\frac{12}{4}(=3)$ ;  $\frac{30}{5}(=6)$ ;  $\frac{70}{10}(=7)$ ; ...

**Echte Brüche:** Ihr Zähler ist kleiner als ihr Nenner.

*Beispiele:*  $\frac{0}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{7}{10}$ ;  $\frac{99}{100}$ ; ...

**Unechte Brüche:** Ihr Zähler ist mindestens so groß wie ihr Nenner.

*Beispiele:*  $\frac{3}{2}$ ;  $\frac{3}{3}$ ;  $\frac{9}{4}$ ;  $\frac{8}{5}$ ;  $\frac{20}{10}$ ;  $\frac{41}{13}$ ;  $\frac{401}{100}$ ;  $\frac{123456789}{3}$ ; ...

Unechte Brüche, die keine Scheinbrüche sind, lassen sich als **gemischte Zahlen** schreiben.

*Beispiele:*  $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ ;  $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ ;  $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ ;  $\frac{41}{13} = 3\frac{2}{13}$ ;  $\frac{401}{100} = 4\frac{1}{100}$ ; ...

**Brüche mit besonderen Eigenschaften**

ZAHLEN

delta6  
Seite 16

**Erweitern** eines Bruchs:

Zähler und Nenner des Bruchs mit der gleichen natürlichen Zahl multiplizieren.

*Beispiel:*  $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$  (Es wurde mit 7 erweitert.)

**Kürzen** eines Bruchs:

Zähler und Nenner des Bruchs durch die gleiche natürliche Zahl dividieren.

*Beispiel:*  $\frac{18}{42} = \frac{18 : 6}{42 : 6} = \frac{3}{7}$  (Es wurde mit 6 gekürzt.)

Beim Erweitern wie beim Kürzen ändert der Bruch seinen Wert nicht.

Die Form eines Bruchs, bei der sein Zähler und sein Nenner teilerfremd sind, heißt

**Grundform** dieses Bruchs; ein Bruch in Grundform ist „vollständig gekürzt“.

**Erweitern und Kürzen**

ZAHLEN

delta6  
Seite 26

Brüche, deren Nenner Zehnerstufenzahlen sind, können als Dezimalzahlen geschrieben werden.

*Beispiele:*  $\frac{7}{10} = 0,7$ ;  $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$ ;  $\frac{53}{1000} = 0,053$ ;  $21\frac{39}{1000} = 21,039$

**Stellenwerttafel:**

| H | Z | E | Komma | z | h | t | Zahl   | Gelesen                            |
|---|---|---|-------|---|---|---|--------|------------------------------------|
|   | 2 | 1 | ,     | 0 | 3 | 9 | 21,039 | einundzwanzig Komma null drei neun |

**Dezimalzahlen**

ZAHLEN

delta6  
Seite 42

Bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 rundet man **ab!** *Beispiele:*

$56\mathbf{2} \approx 560$  (Z)       $1\mathbf{41} \approx 100$  (H)       $5,7\mathbf{36} \approx 5,7$  (z – auf zehntel gerundet)

Bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9 rundet man **auf!** *Beispiele:*

$83\mathbf{6} \approx 840$  (Z)       $4\mathbf{88} \approx 500$  (H)       $4\mathbf{525} \approx 5000$  (T)

$2,\mathbf{856} \approx 3$  (E)       $2,8\mathbf{56} \approx 2,9$  (z)       $2,85\mathbf{6} \approx 2,86$  (h)

**Runden**

ZAHLEN

delta5  
Seite 20

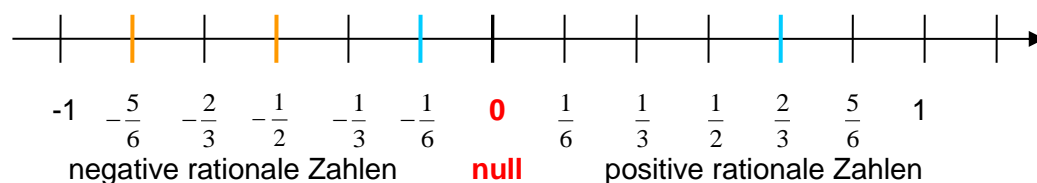
delta6  
Seite 52

Alle positiven und alle negativen Brüche bilden mit der Zahl 0 zusammen die **Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen**; diese enthält somit auch alle ganzen Zahlen (und deshalb auch alle natürlichen Zahlen).

Spiegelt man den Bildpunkt einer rationalen Zahl (z.B.  $-0,74$ ) am Nullpunkt, so erhält man den Bildpunkt ihrer **Gegenzahl** (hier:  $+0,74$ ).

Die Entfernung des Bildpunkts einer Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden gibt den **Betrag** dieser Zahl an. Die Bildpunkte einer Zahl und ihrer Gegenzahl sind vom Ursprung stets gleich weit entfernt; Zahl und zugehörige Gegenzahl besitzen den gleichen Betrag.

Kurz:  $|-1,23| = 1,23$        $|5,01| = 5,01 = |-5,01|$



**Anordnung** der rationale Zahlen: Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Bildpunkt auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.

*Beispiele:*  $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{2}$       und       $-\frac{1}{6} < \frac{2}{3}$       und       $0 < \frac{1}{3}$

Rationale Zahlen

ZAHLEN

delta6  
Seite 32

Unter der Quadratwurzel aus  $x$  (kurz: „Wurzel aus  $x$ “ bzw.  $\sqrt{x}$ ) versteht man für  $x \geq 0$  diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat gleich  $x$  ist.

Es gilt:  $\sqrt{x} \geq 0$       und       $(\sqrt{x})^2 = x$       und       $\sqrt{x^2} = x$       **falls  $x \geq 0$**

Es gilt:  $\sqrt{x^2} = |x|$       „Betrag von  $x$ “      **für beliebige rationale Zahlen  $x$**

Der Term bzw. die Zahl unter dem Wurzelzeichen nennt man **Radikand**.

Das Berechnen des Wertes einer Quadratwurzel nennt man **Wurzelziehen** bzw. besser: **Radizieren**.

*Beispiele:*

$$\sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{81} = 9 \qquad \sqrt{144} = 12 \qquad \sqrt{5} \approx 2,236067977$$

$$(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25 \qquad \sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 > 0 \\ 0 & \text{für } x-4 = 0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x > 4 \\ 0 & \text{für } x = 4 \\ -x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

Quadratwurzeln

ZAHLEN

delta9  
Seite 10f

Reelle Zahlen

Es gibt Zahlen, welche sich nicht als Bruch ( $\frac{z}{n}$  mit  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) darstellen lassen.

Ihre Darstellung ist daher weder endlich (abbrechend) noch periodisch. Man nennt diese Zahlen **irrationale Zahlen**.

Beispiele:

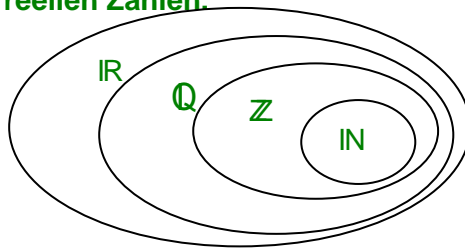
$\sqrt{3} \approx 1,7320508075688772935274463415059...$  ist eine **irrationale** Zahl.

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} \approx 0,3333333333 33333 ...$  ist eine **rationale** Zahl, denn sie ist periodisch.

$\sqrt{1521} = 39$  ist eine **rationale** Zahl (natürliche Zahl), denn sie ist abbrechend.

1,01011011101111011111011111101111110... ist eine **irrationale** Zahl, denn sie bricht nie ab und ist auch nicht periodisch!

Die Menge der rationalen Zahlen und der irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge **IR** der **reellen Zahlen**.



ZAHLEN

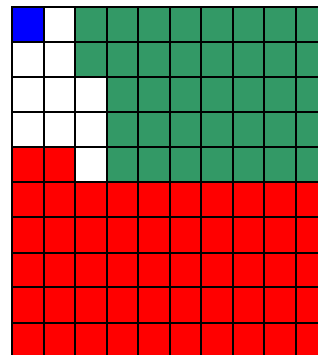
delta9  
Seite 12f  
Seite 18f

Anteile kann man besser vergleichen, wenn sie in **Prozent** (geschrieben: %) angegeben werden:

1 % bedeutet  $\frac{1}{100} = 0,01$

37 % bedeutet  $\frac{37}{100} = 0,37$

52 % bedeutet  $\frac{57}{100} = 0,57$



Häufige Prozentsätze:

$10\% = \frac{10}{100} = 0,10$  ;  $20\% = \frac{20}{100} = 0,20$  ; ...

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$  ;  $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,50$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$  ;  $100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$

Prozentbegriff

ZAHLEN

delta6  
Seite 30f

**Prozentsatz**      **Grundwert**                      **Prozentwert**  
  
 $20\% (= \frac{1}{5})$     von **40 Euro**    sind genau **8 Euro**

Rechnung:  
 $40:100 \cdot 20 = 40:5 = 8$

**Das Ganze**, dessen Anteile verglichen werden, bildet den **Grundwert**.

Jeden **Anteil** am Ganzen kann man (in **Bruchform** oder) in **Prozent** angeben; er stellt den **Prozentsatz** dar.

Der jeweilige Teil des Ganzen bildet den **Prozentwert**.

*Beispiel:* In einem Lostopf sind 80 Lose, darunter sind 32 Gewinne! Wie viel Prozent sind Nieten?

Grundwert: 80                      Prozentwert: 32  
 Prozentsatz (Anteil in %):  $\frac{32}{80} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$

Wird der Grundwert (z. B. der Preis eines Fernsehers) um p Prozent erhöht, so steigt er auf das  $(1 + \frac{p}{100})$ - Fache des ursprünglichen Werts.

Man nennt  $(1 + \frac{p}{100})$  den **Wachstumsfaktor**.

*Beispiel:* Ein Fernseher (320 €) wird um 10% teurer:  
 Neuer Preis:  $320 \text{ €} \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 320 \text{ €} \cdot 1,1 = 352 \text{ €}$

Wird der Grundwert (z. B. der Preis einer Waschmaschine) um p Prozent vermindert, so nimmt er auf das  $(1 - \frac{p}{100})$ - Fache des ursprünglichen Werts ab.

Man nennt  $(1 - \frac{p}{100})$  den **Abnahmefaktor**.

*Beispiel:* Eine Waschmaschine (490 €) wird um 15% billiger:  
 Neuer Preis:  $490 \text{ €} \cdot (1 - \frac{15}{100}) = 490 \text{ €} \cdot 0,85 = 416,50 \text{ €}$

Prozent-  
rechnung

ZAHLEN

delta6  
Seite 196ff

delta7  
Seite 134ff



**Gleichnamige Brüche addieren/subtrahieren:**

Beispiele:  $\frac{7}{19} + \frac{5}{19} = \frac{12}{19}$  ;  $\frac{10}{21} + \frac{4}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

**Ungleichnamige Brüche addieren/subtrahieren:**

Beispiele:  $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{15}{40} + \frac{16}{40} = \frac{31}{40}$  ;  $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}$

**REGEL:**

- ✓ Ungleichnamige Brüche werden vor der Addition bzw. Subtraktion gleichnamig gemacht. (Hauptnenner)
- ✓ Der Summenwert bzw. Differenzwert der Zähler wird durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

**Dezimalzahlen addieren/subtrahieren:**

Beispiele:  $3,28 + 5,06 = 8,34$                        $7,4805 - 4,5040 = 2,9765$

**Multiplikation von Brüchen:**

Beispiele:  $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$  ;  $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 7} = \frac{2}{21}$

**REGEL:**

- ✓ Produkt der Zähler dividiert durch das Produkt der Nenner. („Zähler mal Zähler , Nenner mal Nenner“)
- ✓ *Tipp:* Nach Möglichkeit vor dem Ausmultiplizieren kürzen!

**Multiplikation von Dezimalzahlen:**

Beispiele:  $1,6 \cdot 2,17 = 3,472$                       NR:  $16 \cdot 217 = 3472$   
 $2,5 \cdot 3,18 = 7,950$                               NR:  $25 \cdot 318 = 7950$

**REGEL:**

- ✓ Zunächst den Produktwert der Zahlen ohne Komma bilden.
- ✓ Das Endergebnis hat so viele Dezimalen, wie die beiden Faktoren zusammen besitzen.

**Division durch einen Bruch:**

Beispiele:  $\frac{3}{11} : \frac{2}{5} = \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 2} = \frac{15}{22}$  ;  $\frac{2}{9} : \frac{7}{15} = \frac{2}{9} \cdot \frac{15}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

**REGEL:**

- ✓ Man dividiert durch einen Bruch indem man mit seinem Kehrbuch multipliziert.

**Division durch eine Dezimalzahl:**

Beispiele:  $3,536 : 3,4 = 35,36 : 34 = 1,04$

**REGEL:**

- ✓ „Ausgleichende“ Kommaverschiebung: Der Divisor muss eine natürliche Zahl sein.
- ✓ Dividieren!
- ✓ Wird das Komma des Dividenden überschritten, so setzt man im Quotientenwert das Komma!

Rechnen  
in  $\mathbb{Q}^+$

RECHENARTEN

delta6  
Seite 75/79/83

delta6  
Seite 94/98/  
100/102/104/  
106/108/114



**Summanden mit gleichem Vorzeichen:**

$$(+8) + (+5) = 8 + 5 = +13$$

$$(+1,8) + (+2,5) = 1,8 + 2,5 = +4,3$$

gemeinsames Vorzeichen  
der Summanden

$$(-8) + (-5) = -8 - 5 = -13$$

$$(-1,8) + (-2,5) = -1,8 - 2,5 = -4,3$$

Summenwert der  
Beträge der Summanden

**Summanden mit verschiedenen Vorzeichen:**

$$(+8) + (-5) = 8 - 5 = +3$$

$$(+1,8) + (-2,5) = 1,8 - 2,5 = -0,7$$

Vorzeichen des Summanden  
mit dem größeren Betrag

$$(-8) + (+5) = -8 + 5 = -3$$

$$(-1,8) + (+2,5) = -1,8 + 2,5 = +0,7$$

Unterschied der Beträge  
der Summanden

**Beachte:**

Bei verschiedenen Vorzeichen, aber gleichem Betrag ist der Summenwert 0.

$$(+8) + (-8) = 8 - 8 = 0$$

$$(+4,5) + (-4,5) = 4,5 - 4,5 = 0$$

$$(-5) + (+5) = -5 + 5 = 0$$

$$(-12,7) + (+12,7) = 0$$

Zwei rationale Zahlen werden **subtrahiert**, indem man zum Minuenden die Gegenzahl des Subtrahenden addiert.

**Beispiel:**

$$(+13) - (-5) = (+13) + (+5) = +18 = 18$$

$$(+3,4) - (-47,5) = (+3,4) + (+47,5) = +50,9 = 50,9$$

$$(-154,7) - (+35,8) = (-154,7) + (-35,8) = -154,7 - 35,8 = -190,5$$

**Überschlagsrechnung:**  $(-154,7) - (+35,8) \approx -150 - 40 = -190$

**Faktoren mit gleichem Vorzeichen:**

$$(+5) \cdot (+3) = +15$$

$$(+1,9) \cdot (+2,3) = +4,37$$

positives Vorzeichen („Plus“)

$$(-5) \cdot (-3) = +15$$

$$(-1,9) \cdot (-2,3) = +4,37$$

Produktwert der  
Beträge der Faktoren

**Faktoren mit verschiedenen Vorzeichen:**

$$(+7) \cdot (-3) = -21$$

$$(+1,9) \cdot (-2,3) = -4,37$$

negatives Vorzeichen („Minus“)

$$(-7) \cdot (+3) = -21$$

$$(-1,9) \cdot (+2,3) = -4,37$$

Produktwert der  
Beträge der Faktoren

Zwei ganze Zahlen (nicht Null) werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert. Falls Dividend und Divisor das gleiche Vorzeichen besitzen, erhält das Ergebnis ein positives Vorzeichen, sonst ein negatives.

**Beispiel:**

$$(-18) : (-3) = 6$$

$$(-18) : (+3) = -6$$

$$(-12,236) : (-2,8) = (-122,36) : (-28) = +4,37$$

**Überschlagsrechnung:**  $(-12,236) : (-2,8) \approx (-120) : (-30) = 4$

**Merke:**

$$0 \cdot b = 0 \quad \text{für alle } b \in \mathbb{Q}$$

$$0 : b = 0 \quad \text{für alle } b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$$

Rechnen  
in  $\mathbb{Q}$

RECHENARTEN

delta6  
Seite 176/  
178/184/186

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$$

*Beispiel:*  $2\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = (2 + 9)\sqrt{7} = 11\sqrt{7}$

$$a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a - b)\sqrt{x}$$

*Beispiel:*  $5\sqrt{11} - 2\sqrt{11} = (5 - 2)\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$$

*Beispiel:*  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = x$$

*Beispiel:*  $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 7} = \sqrt{7^2} = 7$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{x}{z}}$$

*Beispiel:*  $\frac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{242}{2}} = \sqrt{121} = 11$

Dabei gilt:  $a, b \in \mathbb{R}$   $x, y \in \mathbb{R}_0^+$   $z \in \mathbb{R}^+$

**Achtung:**

$0 \cdot a = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$

$0 : a = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a : 0$  ist für **KEINEN** Wert  $a$  aus  $\mathbb{R}$  möglich!

Rechen mit  
Quadratwurzeln

RECHENARTEN

delta9  
Seite 20ff

Bruchterme sollten möglichst so vereinfacht werden, dass im Nenner des Endergebnisses keine Wurzeln mehr stehen. Dazu wird geschickt erweitert:

*Beispiele:*

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$$

Es wurde mit der Wurzel des Nenners erweitert.

$$\frac{5}{\sqrt{6} - 8} = \frac{5 \cdot (\sqrt{6} + 8)}{(\sqrt{6} - 8) \cdot (\sqrt{6} + 8)} = \frac{5\sqrt{6} + 40}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - 8\sqrt{6} + 8\sqrt{6} - 64} = \frac{5\sqrt{6} + 40}{6 - 64} = \frac{5\sqrt{6} + 40}{-58} = -\frac{5\sqrt{6} + 40}{58}$$

3. Binomische Formel

$$\frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{3})}{(\sqrt{8} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{8 - 3} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5}(\sqrt{8} - \sqrt{3})$$

3. Binomische Formel

Rationalmachen  
des Nenners

RECHENARTEN

delta9  
Seite 20ff

**Kommutativgesetz:**

Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man die Summanden (Faktoren) vertauscht.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**Assoziativgesetz:**

Der Wert einer Summe (eines Produkts) ändert sich nicht, wenn man Summanden (Faktoren) mit Klammern zusammenfasst oder vorhandene Klammern weglässt.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

**Distributivgesetz:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) : a = b : a + c : a \quad (a \neq 0)$$

**Rechenvorteile**

*Beispiele:*

$$5 \cdot 7,8 = 5 \cdot (7 + 0,8) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 0,8 = 35 + 4 = 39 \quad (\text{„Ausmultiplizieren“})$$

$$8 \cdot 2\frac{3}{7} + 8 \cdot 6\frac{4}{7} = 8 \cdot (2\frac{3}{7} + 6\frac{4}{7}) = 8 \cdot 9 = 72 \quad (\text{„Ausklammern“})$$

$$99 \cdot 53 = (100 - 1) \cdot 53 = 100 \cdot 53 - 1 \cdot 53 = 5300 - 53 = 5247 \quad (\text{„Zerlegen“})$$

**Rechenregeln:**

Die Terme, die in Klammern stehen, werden zuerst berechnet.

*Beispiel:*  $15,9 - (25,4 - 17,6) = 15,9 - 7,8 = 8,1$

Potenzrechnungen werden vor „Punktrechnungen“ ausgeführt.

*Beispiel:*  $4,2 \cdot 2^5 = 4,2 \cdot 32 = 134,4$

„Punktrechnungen“ werden vor „Strichrechnungen“ ausgeführt.

*Beispiel:*  $15,5 - 1,5 \cdot (84 - 78) = 15,5 - 1,5 \cdot 6 = 15,5 - 9 = 6,5$

**Rechenregeln und Rechengesetze**

**RECHENARTEN**

delta5  
Seite 34/44/66/  
104/110/114/  
120/136/

delta6  
Seite 74/82/94/  
102/120/182/  
184/188

**Potenzen:**

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ Faktoren ; } n > 1)$$

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N} ; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

*Beispiele:*

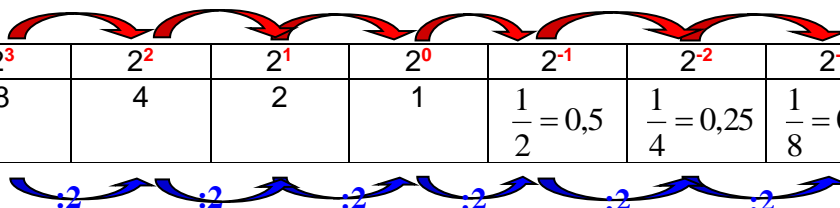
$$13^6 = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 4\,826\,809$$

$$0,7^3 = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,49 \cdot 0,7 = 0,343$$

$$0^7 = 0 \quad 294^1 = 294 \quad 74^0 = 1$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

|        |       |       |       |       |                     |                      |                       |
|--------|-------|-------|-------|-------|---------------------|----------------------|-----------------------|
| Potenz | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | $2^{-1}$            | $2^{-2}$             | $2^{-3}$              |
| Wert   | 8     | 4     | 2     | 1     | $\frac{1}{2} = 0,5$ | $\frac{1}{4} = 0,25$ | $\frac{1}{8} = 0,125$ |



**Potenzen mit ganzzahligen Exponenten**

**RECHENARTEN**

delta8  
Seite 132

Zahlen mit sehr großem bzw. mit sehr kleinem Betrag kann man mithilfe von Zehnerpotenzen übersichtlich darstellen:

Beispiele:  $87\ 000\ 000 = 8,7 \cdot 10\ 000\ 000 = 8,7 \cdot 10^7$

Komma um 7 Stellen nach links...

$0,00035 = 3,5 \cdot 0,0001 = 3,5 \cdot 10^{-4}$

Komma um 4 Stellen nach rechts...

Allg.:  $a \cdot 10^{\pm n}$

Für den Betrag a des Faktors vor der Zehnerpotenz gilt  $1 < a < 10$ .

Wissenschaftliche Schreibweise

„Gleitkomma-darstellung“

RECHENARTEN

delta8  
Seite 132

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis**

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$  bzw.  $x^a : x^b = x^{a-b}$   $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $a, b \in \mathbb{Z}$

Beispiele:  $4^2 \cdot 4^4 = 4^{2+4} = 4^6 = 4096$   $7^2 : 7^{-3} = 7^{2-(-3)} = 7^5 = 16807$

**Potenzieren einer Potenz**

$(x^a)^b = x^{ab}$   $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $a, b \in \mathbb{Z}$

Beispiele:  $(4^2)^4 = 4^8 = 65536$   $(3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten**

$x^a \cdot y^a = (xy)^a$  bzw.  $x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$   $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $a, b \in \mathbb{Z}$

Beispiele:  $3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5 = 7776$   $4^{-2} : 2^{-2} = (4:2)^{-2} = 2^{-2} = 0,25$

Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

RECHENARTEN

delta8  
Seite 134

Die nichtnegative reelle Zahl, deren n-te Potenz x ist, nennt man die **n-te Wurzel** aus x.

Schreibweise:

$\sqrt[n]{x}$

Es gilt also:

$x \in \mathbb{R}_0^+$

$\sqrt[n]{x} \geq 0$  und  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  und  $\sqrt[n]{x^n} = x$

$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Bezeichnungen: Der Term unter der Wurzel heißt **Radikand**.

n heißt **Wurzelexponent**. (Der Wurzelexponent 2 wird meistens weggelassen!)

Beispiele:

$\sqrt[3]{8} = 2$  (weil  $2^3 = 8$ )  $\sqrt[3]{125} = 5$  (weil  $5^3 = 125$ )  $\sqrt[4]{81} = 3$  (weil  $3^4 = 81$ )

Allgemeine Wurzel

RECHENARTEN

delta9  
Seite 110ff

Allgemeine Wurzeln lassen sich auch als Potenzen darstellen:

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  und  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  Dabei gilt:  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

Beispiele:

$\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^3} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$   $512^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$

$256^{0,375} = 256^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{256^3} = \sqrt[8]{(2^8)^3} = \sqrt[8]{(2^3)^8} = 2^3 = 8$

Potenzen mit rationalen Exponenten

RECHENARTEN

delta9  
Seite 114ff

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis**

$$x^{\frac{a}{p}} \cdot x^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a+b}{q}} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

**Beispiele:**  $5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2+1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{5^9} \approx 4,26$  ;  $2^{2,7} \cdot 2^{0,3} = 2^{\frac{27}{10}} \cdot 2^{\frac{3}{10}} = 2^3 = 8$

**Potenzieren einer Potenz**

$$\left(x^{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{b}{q}} = x^{\frac{a \cdot b}{p \cdot q}} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad p, q \in \mathbb{N}$$

**Beispiele:**  $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 32^{\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2}} = 32^{\frac{6}{5}} = (\sqrt[5]{32})^6 = 2^6 = 64$  ;  $\left(5^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{50}} = 5^{\frac{4 \cdot 21}{7 \cdot 50}} = 5^{\frac{6}{25}} = \sqrt[25]{5^6}$

**Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten**

$$x^{\frac{a}{p}} \cdot y^{\frac{a}{p}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{p}} \quad \text{bzw.} \quad x^{\frac{a}{p}} : y^{\frac{a}{p}} = (x : y)^{\frac{a}{p}} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad p \in \mathbb{N}$$

**Beispiele:**  $2^{\frac{3}{2}} \cdot 18^{\frac{3}{2}} = (2 \cdot 18)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{36})^3 = 6^3 = 216$   
 $40^{\frac{4}{5}} : 10^{\frac{4}{5}} = (40 : 10)^{\frac{4}{5}} = (\sqrt[5]{4})^4 \approx 3,03$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

RECHENARTEN

delta9  
Seite 114ff

Die Gleichung  $b^x = p$  hat die Lösung  $x = \log_b p$

$$b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

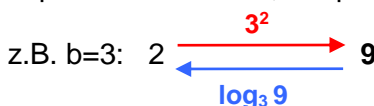
(„Logarithmus von p zur Basis b“)

$$p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

**Beispiele:**  $2^x = 8$  ;  $3^x = 15$  ;  $25^x = 625$   
 $x = \log_2 8 = 3$  ;  $x = \log_3 15$  ;  $x = \log_{25} 625 = 2$

$\log_b p$  ist diejenige Zahl, mit der man die Basis b potenzieren muss, um p zu erhalten.

Das **Logarithmieren zur Basis b** ist eine Umkehrung des **Potenzierens der Basis b**.



**Allgemein:**  $\log_b(b^x) = x$  und  $b^{\log_b y} = y$  mit  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$

**Sonderfälle:**  $\log_b 1 = 0$  und  $\log_b b = 1$  und  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

**Schreibweise:**  $\log_{10} x = \log x = \lg x$

Logarithmus

RECHENARTEN

\*NEU\*  
delta10  
Seite 70 ff

$$\log_b(pq) = \log_b p + \log_b q$$

(Logarithmus eines Produkts)

$$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$$

(Logarithmus eines Quotienten)

$$\log_b(p^r) = r \cdot \log_b p$$

(Logarithmus einer Potenz)

$$\log_b p = \frac{\log_a p}{\log_a b}$$

(Basiswechsel)

Dabei:  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  und  $p, q \in \mathbb{R}^+$  und  $r \in \mathbb{R}$

Rechenregeln für den Logarithmus

RECHENARTEN

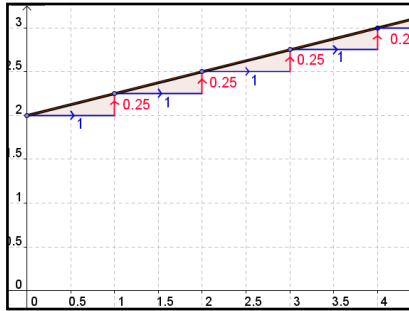
\*NEU\*  
delta10  
Seite 74 ff

Bei einem **linearen Wachstum** ist der Zuwachs pro Zeiteinheit konstant.

Gleichung:  $y = b + a \cdot x$

b ist der (Anfangs-)Bestand für x = 0.

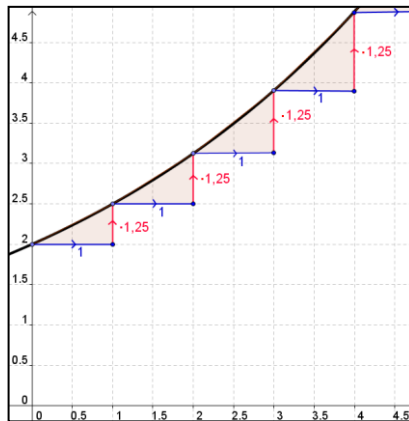
Beispiel rechts:  $a = 0,25$  und  $b = 2$



Bei **exponentiellem Wachstum** ist der Zuwachs immer direkt proportional zum aktuellen Bestand.

Gleichung:  $y = b \cdot a^x$

Beispiel rechts:  $a = 1,25$  und  $b = 2$



Für  $a > 1$  heißt a der **Wachstumsfaktor**, ist  $a < 1$ , dann wird a **Abnahmefaktor** oder **Zerfallskonstante** genannt.

Die Zeitspanne, in der der Bestand jeweils halbiert wird, heißt **Halbwertszeit**.

$$t_H = \log_a 0,5 = \frac{\log 0,5}{\log a} \quad (0 < a < 1)$$

Wachstum

RECHENARTEN

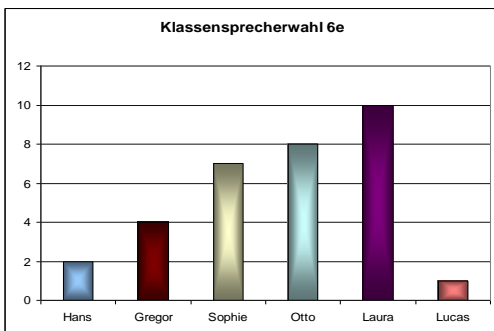
**\*NEU\***

delta10  
Seite 60 ff

Tabelle

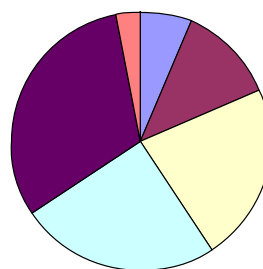
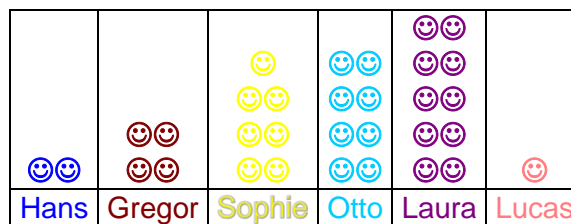
| Schüler    | Hans  | Gregor | Sophie  | Otto | Laura  | Lucas  |
|------------|-------|--------|---------|------|--------|--------|
| Stimmen    | 2     | 4      | 7       | 8    | 10     | 1      |
| Anteil (%) | 6,25% | 12,5%  | ≈21,88% | 25%  | 31,25% | ≈3,13% |

Säulendiagramm



Blockdiagramm (Streifendiagramm)

Bilddiagramm



Kreisdiagramm

Tabellen und Diagramme

ZAHLEN

delta5  
Seite 22

delta6  
Seite 34

Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, d.h. nicht voraussagbar ist, nennen wir **Zufallsexperimente**.

**Beispiele:** Werfen einer Münze ; Ziehen von Kugel (Lottozahlen) ; Glücksrad drehen ; Spielwürfel werfen

**Beispiel:** Ein Spielwürfel wird 25-mal geworfen: Treffer (T) wäre z.B. eine Sechs, eine Niete (N) wäre dann eine 1, 2, 3, 4 oder 5.

**Ergebnisse:**

| Strichliste |        | Tabelle   |        |
|-------------|--------|-----------|--------|
| Augenzahl   | Anzahl | Augenzahl | Anzahl |
| 6           |        | 6         | 4      |
| keine 6     |        | keine 6   | 21     |

Zufalls-  
experimente

delta6  
Seite 62

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu einer **Ergebnismenge** (man spricht auch von einem **Ergebnisraum**) zusammen.

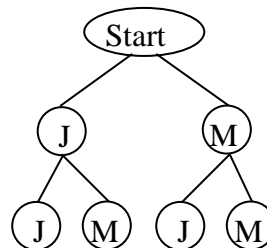
Diese wird häufig mit dem Buchstaben  $\Omega$  bezeichnet.

**Beispiel:**

Geschwisterfolge bei zwei Kindern (**J**unge/**M**ädchen)

Mögliche Ergebnisse: JJ; JM; MJ; MM

Ergebnismenge  $\Omega = \{JJ; JM; MJ; MM\}$



Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments lassen sich durch ein **Baumdiagramm** übersichtlich darstellen.

Ein Zufallsexperiment nennt man **einstufig** oder **mehrstufig**, je nachdem, ob man es in einem oder mehreren Schritten durchführt.

Ergebnismenge

delta8  
Seite 92 ff

delta9  
Seite 144 ff

Werden bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammengefasst, so erhält man ein **Ereignis**.

Die Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse**.

Ein Ereignis, für das alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments günstig sind, heißt **sicheres Ereignis**.

Ein Ereignis, das bei diesem Zufallsexperiment nicht eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis**.

Alle für ein Ereignis E ungünstigen Ergebnisse bilden zusammen dessen **Gegenereignis**  $\bar{E}$ .

Ereignisse werden häufig in Mengenform angegeben.

**Beispiele:**

**Experiment:** Werfen eines Würfels  
**Ereignis  $E_1$ :** Werfen einer geraden Augenzahl

Die Augenzahlen 2 und 4 und 6.  
 $E_1 = \{ 2; 4; 6 \}$

**$E_2$ :** Werfen einer natürlichen Zahl  
 $E_2 = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \} = \Omega$

**$E_3$ :** Werfen der Zahl -5  
 $E_3 = \{ \} = \emptyset$

Gegenereignis zu  $E_1$   
 $\bar{E}_1$  : Werfen einer ungeraden Augenzahl  
 $\bar{E}_1 = \{ 1; 3; 5 \}$

Ereignisse

delta8  
Seite 94 ff

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 25-mal) geworfen und es erscheint dabei k-mal (z.B. 4-mal) die Augenzahl 6.

**Absolute Häufigkeit** der „Sechser“: 4 (Anzahl der Sechser“)

**Relative Häufigkeit** der „Sechser“:  $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$  (Anteil der „Sechser“)

**Allgemein:** **Relative Häufigkeit**

$$\frac{k}{n} = \frac{\text{"Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eingetreten ist"}}{\text{"Anzahl, wie oft das Experiment durchgeführt wurde"}}$$

**Relative Häufigkeit**

delta6  
Seite 64

delta8  
Seite 96 ff

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so ändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis E eintritt, schließlich nur noch sehr wenig:

Die relative Häufigkeit des Ereignisses E schwankt um eine feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses E.

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ist ein **Schätzwert** für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

**Beispiel:** **Experiment:** Werfen einer Münze

| Anzahl n der Würfe | Anzahl k der „Adler“ | Relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) |
|--------------------|----------------------|--|
| 100                | 48                   | 0,48 = 48 %                              |
| 1000               | 517                  | 0,517 = 51,7 %                           |

**Wahrscheinlichkeit**

delta8  
Seite 96 ff

Das **arithmetische Mittel** berechnet man so:

Man addiert alle Einzelwerte und teilt diesen Summenwert durch die Anzahl aller Einzelwerte.

**Beispiele:** Einzelwerte 12 kg , 14,3 kg , 15,1 kg und 15,9 kg  
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{12kg + 14,3kg + 15,1kg + 15,9kg}{4} = \frac{57,3kg}{4} = 14,325kg \approx 14,3kg$$

Einzelwerte 5 mal Note 1 , 12 mal Note 2 , 6 mal Note 3  
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{(5 + 12 + 6)} = \frac{47}{23} \approx 2,04$$

**Arithmetisches Mittel**

delta7  
Seite 128



Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente**.

Sind bei einem Laplace-Experiment 2 (3; 4; 5; 6; ... n) verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse:

$$\frac{1}{2} \quad \left( \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n} \right).$$



Dementsprechend nennt man einen idealen Spielwürfel einen **Laplace-Würfel** (L-Würfel), eine ideale Münze **Laplace-Münze** (L-Münze).

Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E direkt berechnen:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments}}$$

$$= \frac{\text{„Anzahl der günstigen Ergebnisse“}}{\text{„Anzahl aller möglichen Ergebnisse“}}$$

Laplace-Experimente

Laplace-Wahrscheinlichkeit

delta8  
Seite 102 ff

Es sollen z. B. vier Stellen besetzt werden.

Gibt es für die Besetzung der

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1. Stelle | 2. Stelle | 3. Stelle | 4. Stelle |
| $n_1$     | $n_2$     | $n_3$     | $n_4$     |

verschiedene Möglichkeiten,

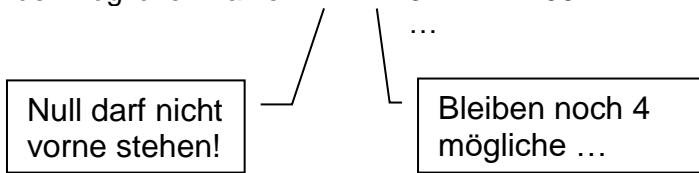
so gibt es insgesamt  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$  verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

**Beispiel:**

Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 3; 5; 7; 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern...

a) genau einmal vorkommen darf?

Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen:  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$



b) auch mehr als einmal vorkommen darf?

Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen:  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$

**Beispiel:**

Auf wie viele Arten kann man vier verschiedene Bücher nebeneinander in ein Regal stellen?

Lösung: Anzahl der Möglichkeiten:  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Zählprinzip

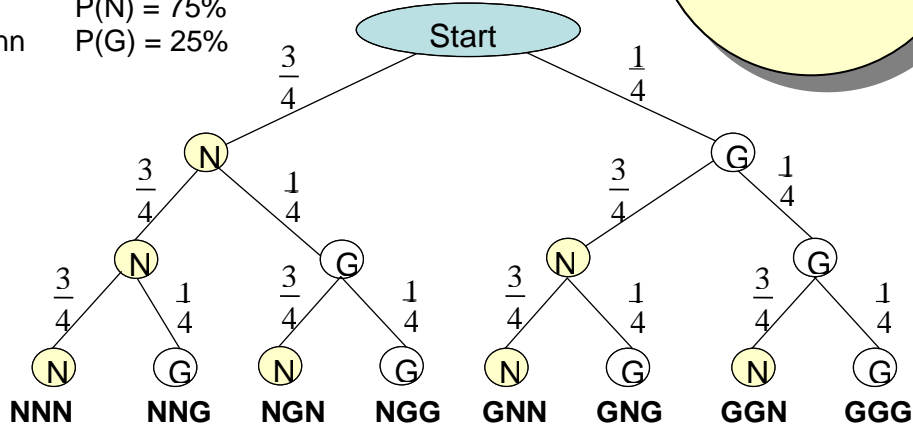
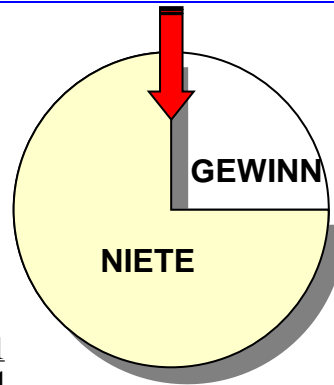
delta8  
Seite 98 ff

Besonders bei mehrstufigen Zufallsexperimenten sind Baumdiagramme zur Veranschaulichung sehr nützlich.

**Beispiel:** Ein Glücksrad (s. Bild) wird dreimal hintereinander gedreht.

Das entsprechende Baumdiagramm mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten sieht so aus:

N: Niete      P(N) = 75%  
G: Gewinn     P(G) = 25%



Ergebnismenge  $\Omega = \{ NNN, NNG, NGN, NGG, GNN, GNG, GGN, GGG \}$

- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an Zweigen von einem Knoten aus ergibt jeweils 1.

*Im Beispiel gilt immer:*  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

- Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

*Im Beispiel:*  $P(NNN) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \approx 42,2\%$   
 $P(GNG) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64} \approx 4,7\%$

- Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten derjenigen **Ergebnisse**, die zu diesem Ereignis führen.

*Im Beispiel:*

$P(\text{"Genau ein Niete"}) = P(GGN; GNG; NGG) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \approx 14,1\%$

Baumdiagramme

Pfadregeln

delta9  
Seite 144 ff

Viele Zufallsexperimente kann man durch ein so genanntes **Urnenmodell simulieren:**

Eine Urne enthält verschiedenfarbige, aber sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Man zieht daraus nun n-mal hintereinander jeweils eine Kugel „blind“.

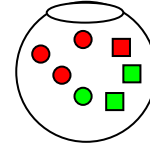
- Ziehen mit Zurücklegen:** Nach dem Notieren der Farbe wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit nicht!)
- Ziehen ohne Zurücklegen:** Die gezogene Kugel wird **nicht** wieder in die Urne zurückgelegt. (Der Urneninhalt ändert sich somit ständig!)

Urnenmodelle

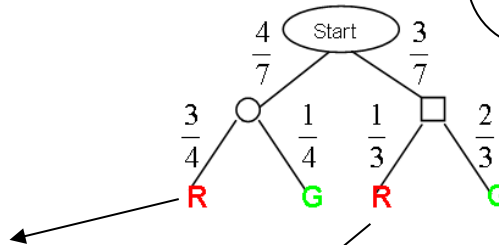
delta9  
Seite 148 ff

Unter der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass vorher bereits das Ereignis B eingetreten ist, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

Bsp.: Urne mit roten bzw. grünen Kugeln und Würfeln ...



$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Nach den Pfadregeln gilt:  $P(R \cap O) = P(O) \cdot P_O(R) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$   $P(R \cap \square) = P(\square) \cdot P_\square(R) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

Beispiele:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn eine Kugel (O) gezogen wurde?

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} = \frac{3}{7} : \frac{4}{7} = \frac{3}{4}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Gegenstand rot (R) ist, wenn ein Würfel (□) gezogen wurde?

$$P_\square(R) = \frac{1}{3} = \frac{1}{7} : \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 100 ff

In einer **Vierfeldertafel** kann man die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen darstellen, wenn zwei Merkmale mit je zwei Ausprägungen betrachtet werden.

|   |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|
|   | O   | □   |     |
| R | 3/7 | 1/7 | 4/7 |
| G | 1/7 | 2/7 | 3/7 |
|   | 4/7 | 3/7 | 1   |

Beispiel von oben („bedingte Wahrscheinlichkeit“):

Weiteres Beispiel:

$$P_{\text{Männlich}}(B) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{16\%}{59\%} \approx 27\%$$

|           |     |     |      |
|-----------|-----|-----|------|
|           | M   | W   |      |
| B         | 16% | 12% | 28%  |
| $\bar{B}$ | 43% | 29% | 72%  |
|           | 59% | 41% | 100% |

M Männlich  
W Weiblich  
B Brillenträger

Vierfeldertafel

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 92 ff

**Terme mit Variablen**

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der außer Zahlen und Rechenzeichen auch veränderliche Größen, so genannte **Variable**, enthalten kann.

Für die Platzhalter wie z. B. □, O oder ♥ bzw. Variable wie z. B. a, b, c, x, y oder z darf man verschiedene Zahlen einsetzen, die in der so genannten **Grundmenge G** angegeben sind. Wird in einen Term für die Variable eine Zahl aus der Grundmenge eingesetzt, so lässt sich der zugehörige Termwert berechnen.

*Beispiel:*

$$G = \{-2; 0; 1\}$$

$$T_1(x) = 4 \cdot x^2 + 13$$

$$T_2(\heartsuit) = 3 \cdot \heartsuit + 7$$

**-2 einsetzen:**

$$T_1(-2) = 4 \cdot (-2)^2 + 13$$

$$= 4 \cdot 4 + 13 = 16 + 13 = \underline{29}$$

$$T_2(-2) = 3 \cdot (-2) + 7$$

$$= -6 + 7 = \underline{1}$$

**0 einsetzen:**

$$T_1(0) = 4 \cdot 0^2 + 13 = 0 + 13 = \underline{13}$$

$$T_2(0) = 3 \cdot 0 + 7 = 0 + 7 = \underline{7}$$

**1 einsetzen:**

$$T_1(1) = 4 \cdot 1^2 + 13 = 4 + 13 = \underline{17}$$

$$T_2(1) = 3 \cdot 1 + 7 = 3 + 7 = \underline{10}$$

*Vereinbarung:*

Man kann den Malpunkt bei Termen weggelassen, wenn es zu keinen Verwechslungen kommen kann.

*Beispiele:*

$$7 \cdot y = 7y \qquad 13 \cdot (a + 2z) = 13(a + 2z) \qquad a \cdot b = ab$$

$$x \cdot (5s - a) = x(5s - a) \qquad (a + b) \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)$$

Wenn bei jeder möglichen Einsetzung für die Variablen der eine Term stets den gleichen Wert hat wie der andere, so nennt man die beiden Terme **äquivalent**. Man kann einen Term mit Hilfe von Rechengesetzen in einen anderen ihm äquivalenten Term umformen.

*Beispiele:*

$$7 \cdot y \text{ und } y \cdot 7 \qquad \text{sind äquivalente Terme}$$

$$7 + a \text{ und } a + 6 + 1 \qquad \text{sind äquivalente Terme}$$

**Terme**

delta7  
Seite 62-76  
Seite 78

**Addieren und Subtrahieren**

Gleichartige Glieder werden wie folgt addiert bzw. subtrahiert:

- ✓ Die **gemeinsame Variable** wird beibehalten.
- ✓ Die **Koeffizienten** werden addiert bzw. subtrahiert.

*Beispiele:*

$$6a + 12a = 18a \qquad 100x + 42x = 142x$$

$$17s - 13s = 4s \qquad 5y - 9y = -4y$$

**Auflösen von Klammern bei der Addition und Subtraktion**

Steht vor einer Klammer ein **Pluszeichen**, so kann man die Klammer weglassen, ohne dass sich der Wert des Terms ändert.

*Beispiele:*

$$8a + (7a + 2a) = 8a + 7a + 2a = 17a$$

$$8a + (7a - 2a) = 8a + 7a - 2a = 13a$$

$$8a + (-7a + 2a) = 8a + (-7a) + 2a = 8a - 7a + 2a = 3a$$

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen**, so wird beim Auflösen der Klammer in der Klammer jedes Pluszeichen zu **minus** und jedes Minuszeichen zu **plus**.

*Beispiele:*

$$8a - (7a + 2a) = 8a - 7a - 2a = -1a = -a$$

$$8a - (7a - 2a) = 8a - 7a + 2a = 3a$$

$$8a - (-7a + 2a) = 8a + 7a - 2a = 13a$$

**Rechnen mit Termen (I)**

delta7  
Seite 78-102  
Seite 198-203

**Multiplizieren und Dividieren**

So multipliziert man ein Produkt mit einer Zahl:

Es wird nur **einer** der Faktoren mit dieser Zahl multipliziert!

*Beispiele:*  $(8 \cdot y) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot y = 24 \cdot y = 24y$   
 $(a \cdot b) \cdot a = (a \cdot a) \cdot b = a^2 \cdot b = a^2b$

Wie dividiert man ein Produkt durch eine Zahl?

Indem man nur einen der Faktoren durch diese Zahl dividiert.

*Beispiele:*  $(15 \cdot a) : 3 = (15 : 3) \cdot a = 5 \cdot a = 5a$   
 $(a \cdot b) : a = (a : a) \cdot b = 1 \cdot b = b$

**Multiplizieren und Dividieren von Summen und Differenzen**

Man multipliziert eine Summe mit einem Faktor, indem man jedes Glied der Summe mit diesem Faktor multipliziert und dann die Produkte addiert (Bei Differenz ebenso).



*Beispiel:*  $8 \cdot (12 + x - 3y) = 8 \cdot 12 + 8 \cdot x - 8 \cdot 3y = 96 + 8x - 24y$


Man dividiert eine Summe durch einen (von null verschiedenen) Divisor, indem man jedes Glied der Summe durch diesen Divisor dividiert und dann die Quotienten addiert (Bei Differenz ebenso).



*Beispiel:*  $(12 + 4x - 6y) : 2 = 12 : 2 + 4x : 2 - 6y : 2 = 6 + 2x - 3y$

**Ausmultiplizieren von Klammern**

Man multipliziert eine Summe (Differenz) mit einer Summe (Differenz), indem man jedes Glied der ersten Summe (Differenz) mit jedem Glied der zweiten Summe (Differenz) **unter Beachtung der Vor- und Rechenzeichen** multipliziert und dann die Teilprodukte addiert bzw. subtrahiert.

*Beispiele:*   
 $(5y + 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y + 12y + 27 = 20y^2 + 57y + 27$



$(5y - 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y - 12y - 27 = 20y^2 + 33y - 27$

$(5y + 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y + 12y - 27 = 20y^2 - 33y - 27$

$(5y - 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y - 12y + 27 = 20y^2 - 57y + 27$

**Ausklammern**

Durch Ausklammern eines Faktors wird aus einer Summe (Differenz) ein **Produkt**.

*Beispiele:*  $6x + 18y = 6(x + 3y)$   
 $5xyz + 20xyw = 5xy(z + 4w)$   
 $-5w - 2s = (-1) \cdot (5w + 2s) = -(5w + 2s)$

Terme der Form  $a + b$  oder  $a - b$  nennt man **Binom**.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  "Plus-Formel"  
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  "Minus-Formel"  
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  "Plus-Minus-Formel"

**Rechnen mit Termen (II)**

delta7  
 Seite 78-102  
 Seite 198-203

**Binomische Formeln**

delta9  
 Seite 52ff



Eine Gleichung besteht aus **zwei Termen**, die miteinander durch ein **Gleichheitszeichen** verbunden sind.

$$x + 3 = 2x - 7$$

Setzt man für die **Variable** eine Zahl in die Gleichung ein, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben.

$$4 + 3 = 2 \cdot 4 - 7$$

$$7 = 1 \quad \text{falsch}$$

Die (vorgegebene) Menge aller Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**.

$$G = \mathbb{N}$$

Die Zahlen der Grundmenge G, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage liefern, heißen **Lösungen** dieser Gleichung.

$$10 + 3 = 2 \cdot 10 - 7$$

$$13 = 13$$

Die Lösungen einer Gleichung fasst man zur **Lösungsmenge IL** dieser Gleichung zusammen.

$$IL = \{10\}$$

Wenn kein Element der Grundmenge G beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, dann ist die Lösungsmenge die **leere Menge**, geschrieben  $\{ \}$  (oder  $\emptyset$ ).

$$G = \{1; 2; 3\}$$

$$x + 3 = 2x - 7$$

$$IL = \{ \}$$

Gleichungen  
Grundbegriffe

delta7  
Seite 104-105

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

**Äquivalenzumformungen** sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

$$3x + 1 = 7$$

✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert.

$$3x + 1 = 7 \quad | +3$$

$$3x + 4 = 10$$

✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert.

$$3x + 4 = 10 \quad | -4$$

$$3x = 6$$

✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**.

$$3x = 6 \quad | \cdot 2$$

$$6x = 12$$

✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**.

$$6x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

Beispiele:

a) Grundmenge:  $G = \mathbb{N}$   
 Gleichung:  $x + 12 = 4$   $| -12$   
 Neue Gleichung:  $x = -8$   
 Lösungsmenge:  $IL = \{ \}$  weil  $-8 \notin \mathbb{N}$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

b)  $G = \mathbb{Z}$   
 $4x - 3 = 25 \quad | +3$   
 $4x = 28 \quad | :4$   
 $x = 7 \in \mathbb{Z}$   
 $IL = \{7\}$

c)  $G = \mathbb{Q}$   
 $7x + 4 = 3 - x \quad | +x$   
 $8x + 4 = 3 \quad | -4$   
 $8x = -1 \quad | :8$   
 $x = -0,125$   
 $IL = \{-0,125\}$

**ACHTUNG:** Wird eine **Ungleichung** mit einer **negativen Zahl multipliziert** oder durch eine **negative Zahl dividiert**, so muss man das **Ungleichheitszeichen umdrehen!**

d)  $-4x < 24 \quad | :(-4)$   
 $x > -6$   
 $IL = \{x \mid x > -6\}$  **Mengenschreibweise**  
 $= ] -6 ; +\infty [$  **Intervallschreibweise**

e)  $-x \geq -31 \quad | \cdot (-1)$   
 $x \leq 31$   
 $IL = \{x \mid x \leq 31\}$   
 $= ] -\infty ; 31 ]$

Lösen von (Un-) Gleichungen (I)

delta7  
Seite 106-119

delta8  
Seite 62-65

Gleichungen, bei denen die Variable in mindestens einem der Nenner auftritt nennt man **Bruchgleichung**.

**Graphische Lösung:**

Man zeichnet zuerst die Funktionsgraphen der beiden Gleichungsseiten. Dann liest man die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte ab.

*Im Beispiel:*

Die Graphen der Funktionen

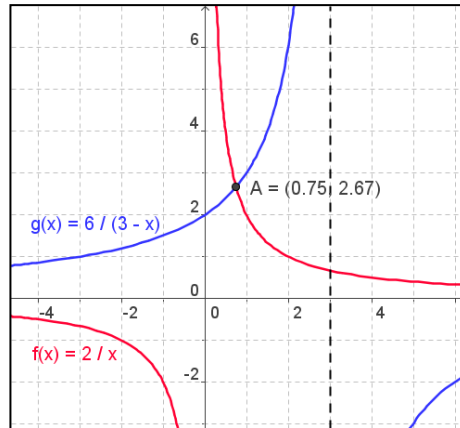
**f:**  $f(x) = \frac{2}{x}$  und **g:**  $g(x) = \frac{6}{3-x}$

haben nur den Punkt A (0,75 | 2,67) gemeinsam, die Bruchgleichung hat also die Lösungsmenge **IL** = {0,75}.

Definitionsmenge angeben: ID =  $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

*Beispiel:*

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$



**Rechnerische Lösung:**

Beide Seiten der Bruchgleichung mit einem gemeinsamen Nenner (am besten mit dem Hauptnenner) aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen.

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$

HN:  $(3-x) \cdot x$

$$\frac{2 \cdot (3-x) \cdot x}{x} = \frac{6 \cdot (3-x) \cdot x}{3-x}$$

Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen. Prüfen, ob die ermittelte Lösung zur Definitionsmenge gehört.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3-x) &= 6 \cdot x & | \text{TV} \\ 6 - 2x &= 6x & | +2x \\ 6 &= 8x & | :8 \\ x &= 0,75 \end{aligned}$$

Probe machen: LS:  $\frac{2}{0,75} = 2\frac{2}{3}$  RS:  $\frac{6}{3-0,75} = \frac{6}{2,25} = 2\frac{2}{3}$  LS = RS ✓

Lösungsmenge angeben: **IL** = {0,75}.

*Weiteres Beispiel:*

$$\frac{2x+2}{x-6} = \frac{4x-140}{2x}$$

ID =  $\mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$

HN:  $2x(x-6)$   $\frac{(2x+2)2x(x-6)}{x-6} = \frac{(4x-140)2x(x-6)}{2x}$

$$(2x+2)2x = (4x-140)(x-6)$$

$$4x^2 + 4x = 4x^2 - 24x - 140x + 840 \quad | -4x^2$$

$$4x = -164x + 840 \quad | +164x$$

$$168x = 840 \quad | :168$$

$$x = 5 \quad \mathbf{IL} = \{5\}.$$

Probe: LS =  $(2 \cdot 5 + 2) : (5 - 6) = 12 : (-1) = -12$  RS =  $(4 \cdot 5 - 140) : (2 \cdot 5) = -120 : 10 = -12$  LS = RS ✓

Lösen von Gleichungen (II)

Bruchgleichungen



Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, c \in \mathbb{R}$$

nennt man **quadratische Gleichungen**.

**Graphische Lösung:**

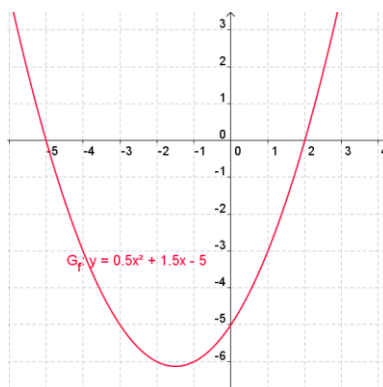
Man kann die Lösungen der Gleichung als Nullstellen des Funktionsgraphen von  $f(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 5$  deuten.

*Im Beispiel:*

Der Graph der Funktion  $f(x)$  hat die beiden Nullstellen  $(-5|0)$  und  $(2|0)$  und die Gleichung somit die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{-5; 2\}$ .

*Beispiel:*

$$0,5x^2 + 1,5x - 5 = 0$$



**Rechnerische Lösung mit Linearfaktoren:**

$(x - 3)(x + 5) = 0$  ergibt ausmultipliziert die Gleichung  $x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$ . Bei der **Linearfaktorzerlegung** links kann man die Lösungen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -5$  ablesen! Somit kann man oft Lösungen erraten:

|                   |                          |                         |                          |
|-------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| <i>Beispiele:</i> | $x^2 - 12x + 20 = 0$     | $x^2 - 8x = 0$          | $x^2 - 49 = 0$           |
|                   | $(x - 10)(x - 2) = 0$    | $x(x - 8) = 0$          | $(x - 7)(x + 7) = 0$     |
|                   | $\mathbb{L} = \{10; 2\}$ | $\mathbb{L} = \{0; 8\}$ | $\mathbb{L} = \{-7; 7\}$ |

**Rechnerische Lösung mit der Lösungsformel:**

Die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) lautet:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Der Radikand  $b^2 - 4ac$  wird auch **Diskriminante D** genannt.

Ist  $D < 0$ , so gibt es **KEINE** Lösung.  
Ist  $D = 0$ , so gibt es **genau eine** Lösung.  
Im Falle  $D > 0$  existieren **zwei** Lösungen.

*Beispiele:*  $x^2 - 12x + 20 = 0$   
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64 > 0$  also gibt es zwei Lösungen!

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2} = \frac{2(6 \pm 4)}{2} = 6 \pm 4$$

$$x_1 = 6 + 4 = 10 \quad \text{und} \quad x_2 = 6 - 4 = 2 \quad \text{also} \quad \mathbb{L} = \{10; 2\}$$

$$3x^2 - 30x + 75 = 0$$

$D = (-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 75 = 900 - 900 = 0$  also gibt es genau eine Lösung!

$$x_{1/2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm 0}{6} = \frac{30}{6} = 5 \quad \text{also} \quad \mathbb{L} = \{5\}$$

Die Gleichung  $-2x^2 + 3x - 7 = 0$  hat wegen

$D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 9 - 56 = -47 < 0$  keine Lösung, also  $\mathbb{L} = \{\}$

**Lösen von Gleichungen (III)**

**Quadratische Gleichungen**

Beispiele und hilfreiche Methoden:

- $3x + 34 = 4(x - 2) - 17 \rightarrow$  **Äquivalenzumformungen** (Lineare Gleichung)
- $12x^7 = 36 \rightarrow$  **Radizieren**  
 $x^7 = 3$  bzw.  $x = \sqrt[7]{3}$
- $3x^2 + 4x = 63 \rightarrow$  **Lösungsformel** (Quadratische Gleichung)
- $3x^5 - 4x^3 + 12x^4 = 0 \rightarrow$  **x ausklammern** (hier  $x^3$ )  
 $x^3 \cdot (3x^2 - 4 + 12x) = 0$   $x_1=0$ , dann  $x_{2/3}$  mit Lösungsformel
- $8x^4 - 5x^2 + 23 = 0 \rightarrow$  **Substitution**  $z:=x^2$   
 $8z^2 - 5z + 23 = 0$  dann Lösungsformel  $z_{1/2}$   
(Rücksubstitution nicht vergessen! x gesucht!)
- $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow$  Eine Lösung **raten**, dann **Polynomdivision**  
( Siehe Funktionen (IX) – Nullstellen ganzrationaler Funktionen )

Lösen von Gleichungen (IV)

Algebraisch Gleichungen höheren Grades

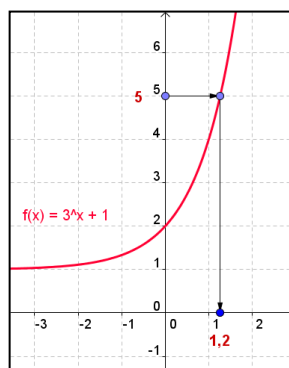
**\*NEU\***  
delta10  
Seite 114 ff

Gleichungen, bei denen die Variable nur im Exponenten auftritt, heißen **Exponentialgleichungen**.

**Beispiele:** a)  $3^x + 1 = 5$  Graphische Lösung:  $x \approx 1,2$

Rechnerische Lösung:  $3^x + 1 = 5 \Rightarrow 3^x = 4$   
 $x = \log_3 4 \approx 1,262$

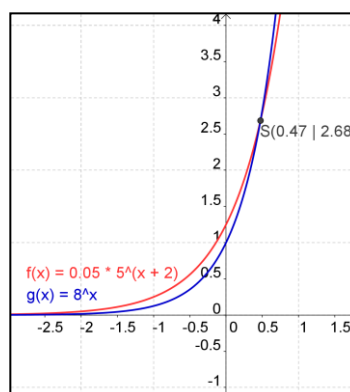
- b)  $5^{x+2} - 8 = 12$       c)  $2^{x+2} - 6 \cdot 2^{x-1} = 8$   
 $5^{x+2} = 20$                        $2^x \cdot (2^2 - 6 \cdot 2^{-1}) = 8$   
 $x + 2 = \log_5 20$                        $2^x \cdot (2^2 - 3) = 8$   
 $x = \log_5 20 - 2$                        $2^x = 8$   
 $\approx -0,1386$                                $x = 3$



- d)  $0,05 \cdot 5^{x+2} = 8^x$  (beidseitig logarithmieren – Basis 10)  
 $\log(0,05 \cdot 5^{x+2}) = \log(8^x)$  Rechenregeln für Logarithmus anwenden  
 $\log 0,05 + \log(5^{x+2}) = \log(8^x)$  Rechenregeln für Logarithmus anwenden  
 $\log 0,05 + (x+2) \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$  Ausmultiplizieren  
 $\log 0,05 + x \cdot \log 5 + 2 \cdot \log 5 = x \cdot \log 8$   
 $x \cdot \log 5 - x \cdot \log 8 = -2 \cdot \log 5 - \log 0,05$   
 $x \cdot (\log 5 - \log 8) = -2 \cdot \log 5 - \log 0,05$   

$$x = \frac{-2 \cdot \log 5 - \log 0,05}{\log 5 - \log 8} = \frac{\log(5^{-2} : 0,05)}{\log \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{\log 0,8}{\log 0,625} = \log_{0,625} 0,8 \approx 0,47$$



Lösen von Gleichungen (V)

Exponentialgleichungen

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 80 ff

Zwei lineare Gleichungen, die zwei Variable enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

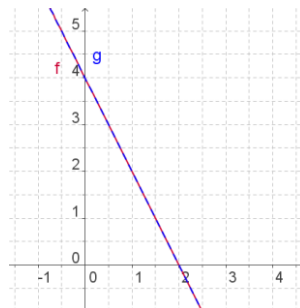
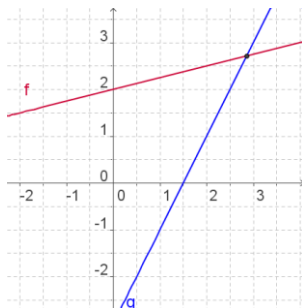
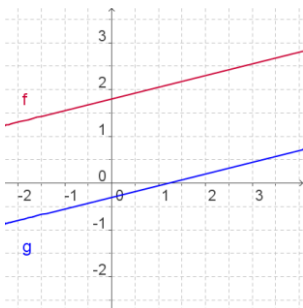
Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.

I)  $3y + x = 9 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$   
 II)  $y = 3x - 2 \rightarrow f(x) = 3x - 2$

Die Koordinaten  $x_s = 1,5$ ;  $y_s = 2,5$  des Schnittpunkts S (1,5 | 2,5) der zugehörigen Geraden erfüllen als einzige beide Gleichungen.

Sie bilden zusammen die (einzige) Lösung des Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge also  $IL = \{(1,5 | 2,5)\}$  ist.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden zueinander parallel sind, einander schneiden oder zusammenfallen.



Die Lösung kann **graphisch** gefunden werden, indem man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem einträgt und die Koordinaten ihres Schnittpunkts abliest.

Das **Gleichsetzungsverfahren**:

1. Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen

$$y = -\frac{1}{3}x + 3 \quad \text{und} \quad y = 3x - 2$$

2. Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten

$$-\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 2 \quad | \cdot 3$$

3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält

$$\begin{aligned} -x + 9 &= 9x - 6 & | +x, +6 \\ 15 &= 10x & | :10 \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen

$$y = 3 \cdot 1,5 - 2 = 2,5$$

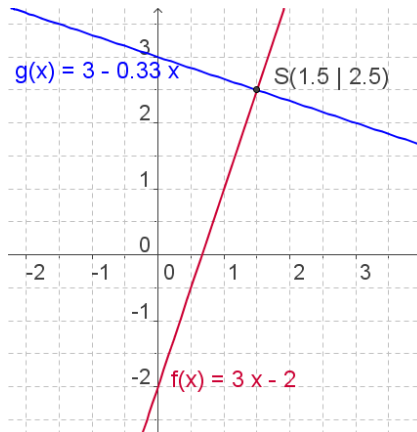
5. Angeben der Lösungsmenge

$$IL = \{(1,5 | 2,5)\}$$

Beispiel:

I)  $3y + x = 9$

II)  $y = 3x - 2$



Lineare Gleichungssysteme (I)

Mit zwei Variablen

Das **Einsetzungsverfahren**:

- |  |   |
|--|---|
| 1. Auflösen einer der Gleichungen nach einer der Variablen   | $3y + x = 9$<br>$y = 3x - 2$  |
| 2. Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung  | $3(3x - 2) + x = 9$<br>$9x - 6 + x = 9$<br>$10x - 6 = 9$<br>$10x = 15$<br>$x = 1,5$ |
| 3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält                             |   |
| 4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen | $y = 3 \cdot 1,5 - 2 = 2,5$   |
| 5. Angeben der Lösungsmenge  | $\mathbf{L} = \{(1,5   2,5)\}$  |

Das **Additionsverfahren**:

Unterscheiden sich bei einem Gleichungssystem die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen, so ist es günstig, die beiden Gleichungen zu addieren, da dann eine der beiden Variablen „wegfällt“.

*Beispiel:*

|        |                  |       |
|--------|------------------|-------|
| I      | $12x + 7y = 45$  |       |
| II     | $-5x - 7y = -31$ |       |
| <hr/>  |                  |       |
| I + II | $7x = 14$        | I : 7 |
|        | $x = 2$          |       |

↗

In Gleichung I eingesetzt:

$$12 \cdot 2 + 7y = 45$$

$$7y = 21$$

$$y = 3$$

$$\mathbf{L} = \{(2 | 3)\}$$

*Verallgemeinerung (siehe unten):*

Wenn keine der beiden Variablen sofort durch bloßes Addieren „wegfällt“, muss man eine der Gleichungen (oder beide Gleichungen) vor dem Addieren zunächst mit einem geeigneten Faktor (bzw. mit geeigneten Faktoren) multiplizieren.

Natürlich führt jedes dieser drei Verfahren zur gleichen Lösungsmenge.

*Beispiel:*

|          |                    |           |
|----------|--------------------|-----------|
| I        | $-3x - 11y = 23$   | · 5       |
| II       | $5x - 7y = 63$     | · 3       |
| <hr/>    |                    |           |
| I'       | $-15x - 55y = 115$ |           |
| II'      | $15x - 21y = 189$  |           |
| <hr/>    |                    |           |
| I' + II' | $-76y = 304$       | I : (-76) |
|          | $y = -4$           |           |

↗

In Gleichung II eingesetzt:

$$5x - 7 \cdot (-4) = 63$$

$$5x + 28 = 63$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

$$\mathbf{L} = \{(7 | -4)\}$$

Ein lineares Gleichungssystem kann auch aus **drei** linearen Gleichungen mit **drei** Variablen bestehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 2x + 3y + 2z = 3 \\ \text{(II)} \quad & x + 4y + 4z = -2 \\ \text{(III)} \quad & 5x + 3y - z = 0 \end{aligned}$$

Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

**Lösungsverfahren:**

Zuerst eliminiert man aus zwei Gleichungen eine der drei Unbekannten. Das entstandene Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ist dann wie gewohnt zu lösen. Am Ende berechnet man noch den Wert der dritten Unbekannten.

... z. B. mit dem Einsetzverfahren: aus (II) folgt  $x = -2 - 4y - 4z$

Einsetzen in I) ergibt  $2(-2 - 4y - 4z) + 3y + 2z = 3$

$$\begin{aligned} -4 - 8y - 8z + 3y + 2z &= 3 \\ -5y - 6z &= 7 \end{aligned} \quad \text{(I*)}$$

Einsetzen in III) ergibt  $5(-2 - 4y - 4z) + 3y - z = 0$

$$\begin{aligned} -10 - 20y - 20z + 3y - z &= 0 \\ -17y - 21z &= 10 \end{aligned} \quad \text{(III*)}$$

Aus I und III wird x eliminiert

$$\begin{aligned} 3,5 \cdot \text{(I*)} \text{ ergibt } & -17,5y - 21z = 24,5 \quad \text{(I**) } \\ \text{(III*)} - \text{(I**) } & 0,5y = -14,5 \\ y = -29 & \Rightarrow \text{(in I*) } z = 23 \\ \Rightarrow \text{(in II) } & x = -2 - 4(-29) - 4(23) = 22 \\ \Rightarrow & \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(22; -29; 23)\}}} \end{aligned}$$

... z. B. mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{aligned} \text{I} + 2 \cdot \text{III} & \quad 12x + 9y = 3 \\ \text{II} + 4 \cdot \text{III} & \quad 21x + 16y = -2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{(IV)} \\ \text{(V)} \end{matrix}$$

Es werden zwei Gleichungen ohne z erzeugt

$$16 \cdot \text{(IV)} - 3 \cdot \text{(V)} \quad x = 22 \quad \Rightarrow \dots$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x - 2y - z = 1 \\ \text{(II)} \quad & -x + y + 2z = 2 \\ \text{(III)} \quad & -2x + 4y + 2z = 6 \end{aligned}$$

Es werden zwei Gleichungen ohne x erzeugt...

$$\begin{aligned} \text{(I)} + \text{(II)} & \quad -y + z = 3 \\ 2 \cdot \text{(I)} + \text{(III)} & \quad 0 = 8 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}} \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann durch eine Zuordnung beschrieben werden: Gibt es dabei zu **jedem** zulässigen Wert der ersten Größe **genau einen** Wert der ihr zugeordneten zweiten Größe, so nennt man die Zuordnung eine **Funktion f**.

Funktionen können z. B. durch **Terme**, durch **Tabellen** oder durch **Schaubilder (Graphen)** beschrieben werden.

Häufig wird die erste Größe, die **unabhängige Variable**, mit **x** bezeichnet. Die zweite Größe, die von x **abhängige Variable**, bezeichnet man als Funktionswert von x.

Die Menge aller Werte von x heißt **Definitionsmenge D<sub>f</sub>**, die Menge aller **Funktionswerte** heißt **Wertemenge W<sub>f</sub>**.

Werte von x, für die der Funktionswert 0 ist, heißen **Nullstellen** der Funktion.

**Beispiel: Zuordnungsvorschrift:**

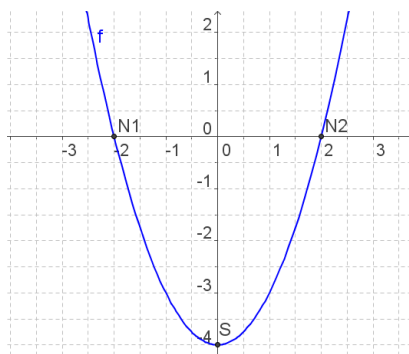
Jeder rationalen Zahl wird der um 4 verminderte Wert ihres Quadrats zugeordnet.

**Funktion f:**  $f(x) = x^2 - 4$

Funktionsgleichung      Funktionsterm

|          |    |       |    |    |
|----------|----|-------|----|----|
| x        | 0  | +0,5  | +1 | +2 |
| y = f(x) | -4 | -3,75 | -3 | 0  |

Definitionsmenge:  $D_f = \mathbb{R}$   
 Wertemenge:  $W_f = [-4; +\infty[$   
 Nullstellen:  $x_{1/2} = \pm 2$ ,  
 da  $f(\pm 2) = 0$  ist.



Funktionsgraph

Funktionen (I)

Fachbegriffe

delta8  
Seite 30ff

$f: f(x) = mx + t$        $m, t \in \mathbb{R}$  ;  $D_f = \mathbb{R}$

Der Graph G<sub>f</sub> einer linearen Funktion ist eine Gerade g, die die **y-Achse im Punkt T(0 | t)** schneidet.

Man nennt t den **y-Achsenabschnitt** der Geraden g; m ist die **Steigung** der Geraden g.

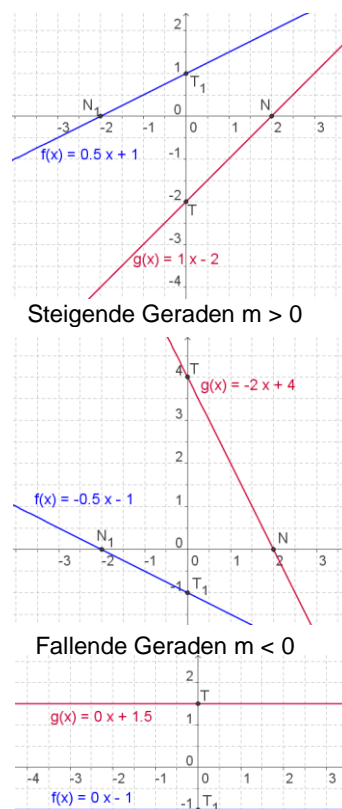
Für die **Nullstelle** x<sub>N</sub> von f gilt  $f(x_N) = 0$ .

Man spricht auch von der Gleichung der Geraden g und schreibt g:  $y = mx + t$ .

Verläuft die Gerade durch die Punkte P(x<sub>p</sub> | y<sub>p</sub>) und Q(x<sub>q</sub> | y<sub>q</sub>),  $x_q \neq x_p$ , so gilt für die Geradensteigung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Zur x-Achse parallele Geraden m = 0



Funktionen (II)

Lineare Funktionen

delta8  
Seite 47ff

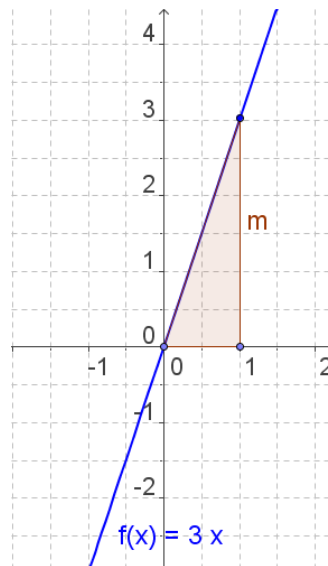
Wird dem Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen, .... dem k-Fachen ( $k \in \mathbb{R}$ ) einer Größe  $x$  das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, ... das k-Fache einer Größe  $y$  zugeordnet, so sind  $x$  und  $y$  zueinander **proportionale Größen**.

Bei dieser Zuordnung gilt  $\frac{y}{x} = m$   
 mit **festem**  $m$  ( $m, x, y \neq 0$ );  
 sie kann also durch die Funktionsgleichung  $y = mx$  beschrieben werden.

Die Funktion  $f: f(x) = mx$  ;  $m \in \mathbb{R}$  ,  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$   
 heißt **proportionale Funktion**.

Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine **Gerade durch den Ursprung** des Koordinatensystems;  
 dabei ist  $m$  die **Steigung** dieser Geraden.

Das rechtwinklige Dreieck mit waagrechter Kathete der Länge 1 LE und senkrechter Kathete der Länge  $m$  LE heißt **Steigungsdreieck**.



Funktionen (III)

Funktionen der direkten Proportionalität

delta8  
Seite 48ff

Zwei Größen  $x$  und  $y$  heißen zueinander **indirekt proportional**, wenn gilt:  
 Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht ... , halbiert, drittelt ... man den Wert der einen Größe  $x$ , so halbiert, drittelt, viertelt ... , verdoppelt, verdreifacht ... sich der Wert der anderen Größe  $y$ .

Dem k-Fachen von  $x$  entspricht der k-te Teil von  $y$  und umgekehrt ( $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

Das Produkt  $xy$  von zwei zueinander indirekt proportionalen Größen hat stets den gleichen Wert:

$$x \cdot y = a \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\text{d. h. } y = \frac{a}{x} .$$

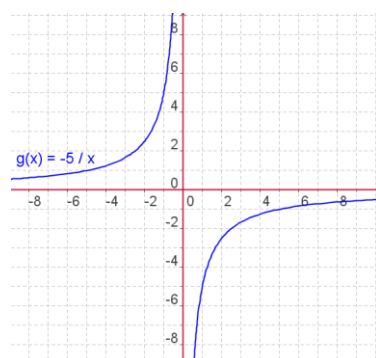
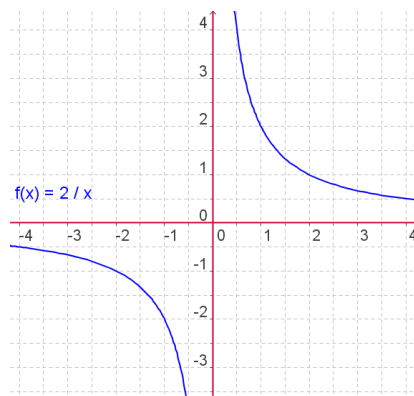
$$\text{Jede Funktion } f: f(x) = \frac{a}{x}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ; \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

beschreibt die indirekte Proportionalität der beiden von null verschiedenen Variablen  $x$  und  $y$ .

Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Hyperbel**.

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote**,  
 die y-Achse eine **senkrechte Asymptote**  
 des Funktionsgraphen.



Funktionen (IV)

Funktionen der indirekten Proportionalität

delta8  
Seite 112ff

Funktionen (V)

Ist der Funktionsterm ein Bruchterm, bei dem die Variable mindestens im Nenner vorkommt, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion**.

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Variablen, für die der Nenner nicht gleich null wird.

**Definitionslücken:** Nullstellen des Nennerterms

*Beispiel:*

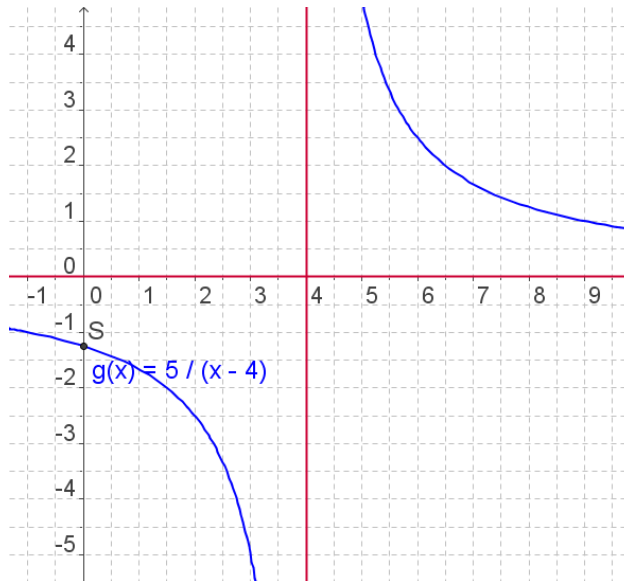
$$g(x) = \frac{5}{x-4} \quad \text{ID}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Die Funktion g hat die Definitionslücke 4.

g hat keine Nullstelle.

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S (0 | -1,25).

**Waagrechte Asymptote:**  $y = 0$   
**Senkrechte Asymptote:**  $x = 4$



Wertetabelle:

|             |    |       |       |      |    |   |   |     |
|-------------|----|-------|-------|------|----|---|---|-----|
| <b>x</b>    | -1 | 0     | 1     | 2    | 3  | 4 | 5 | 6   |
| <b>g(x)</b> | -1 | -1,25 | -1,67 | -2,5 | -5 | - | 5 | 2,5 |

*Beispiel:*

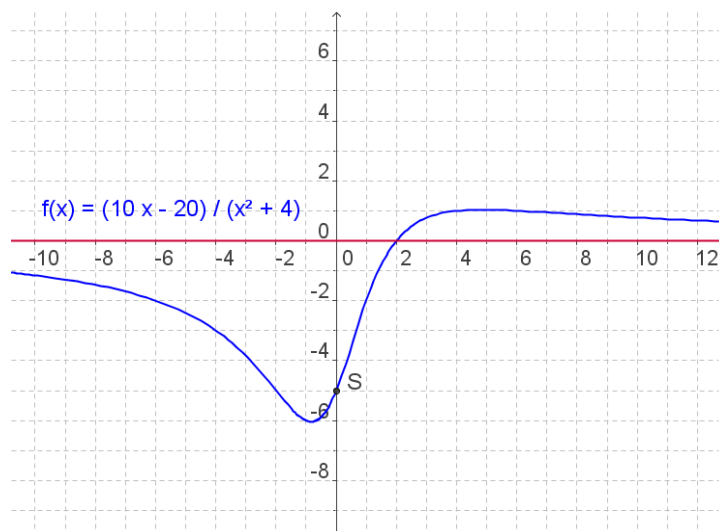
$$f(x) = \frac{10x - 20}{x^2 + 4} \quad \text{ID}_f = \mathbb{R}$$

Die Funktion f hat keine Definitionslücke.

f hat die Nullstelle N(2 | 0).

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S (0 | -5).

**Waagrechte Asymptote:**  $y = 0$   
**Senkrechte Asymptote:** Keine



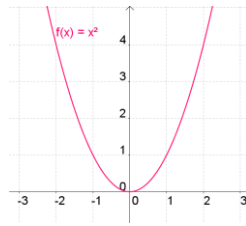
|             |    |    |    |    |   |   |   |      |
|-------------|----|----|----|----|---|---|---|------|
| <b>x</b>    | -6 | -4 | -2 | 0  | 2 | 4 | 6 | 8    |
| <b>f(x)</b> | -2 | -3 | -5 | -5 | 0 | 1 | 1 | 0,88 |

Gebrochenrationalen Funktionen



**Normalparabel** nennt man den Graphen der quadratischen Funktion  $f(x) = x^2$ .

$ID_f = \mathbb{R}$        $W_f = \mathbb{R}_0^+$   
 Nullstelle       $N(0 | 0)$   
 Tiefster Punkt: **Scheitel**  $S(0 | 0)$



**Verschiebung der Normalparabel...**

**... in y-Richtung**

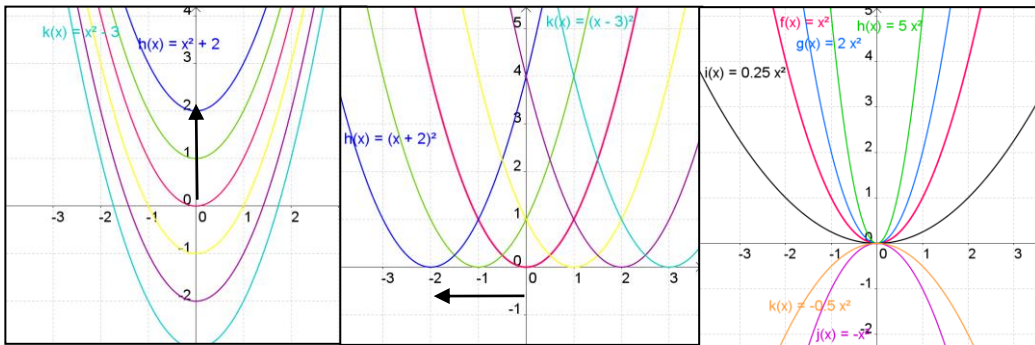
$f(x) = x^2 + a$

**... in x-Richtung**

$f(x) = (x + a)^2$

**Streckung / Spiegelung**

$f(x) = ax^2$



Der Graph der **quadratischen Funktion**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  heißt **Parabel**.

Dabei gilt:  $ID_f = \mathbb{R}$  ;  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  $b, c \in \mathbb{R}$

Der Graph hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse  $s_y(0 | c)$ .

Es gibt zwei, einen oder keinen Schnittpunkt(e) mit der x-Achse (**Nullstellen**).

Der tiefste / höchste Punkt der Parabel heißt **Scheitel**(punkt).

Der Graph ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel.

Der Graph der Parabel zur Funktionsgleichung  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ist für ...

|              |                        |                                 |
|--------------|------------------------|---------------------------------|
| $a < -1$     | ...nach unten geöffnet | ...enger als die Normalparabel  |
| $a = -1$     | ...nach unten geöffnet | ... kongruent zur Normalparabel |
| $-1 < a < 0$ | ...nach unten geöffnet | ...weiter als die Normalparabel |
| $0 < a < 1$  | ...nach oben geöffnet  | ...weiter als die Normalparabel |
| $a = 1$      | ...nach oben geöffnet  | ... kongruent zur Normalparabel |
| $a > 1$      | ...nach oben geöffnet  | ...enger als die Normalparabel  |

Durch **quadratische Ergänzung** kann man jeden Funktionsterm einer Parabel auf die **Scheitelform**  $f(x) = a(x - d)^2 + e$  bringen. Der Scheitel ist dann  $S(d | e)$ .

**Beispiel:**

$f(x) = 0,5x^2 - 0,5x - 1$

Ausklammern:  $= 0,5 [ x^2 - x + (0,5)^2 - (0,5)^2 ] - 1$

$= 0,5 [ (x - 0,5)^2 - 0,25 ] - 1$

$= 0,5 (x - 0,5)^2 - 0,125 - 1$

$= 0,5(x - 0,5)^2 - 1,125$

Quadratisch ergänzen

Binomische Formel

Somit:  $G_f$  ist weiter als die Normalparabel und nach oben offen ( $a=0,5$ )!

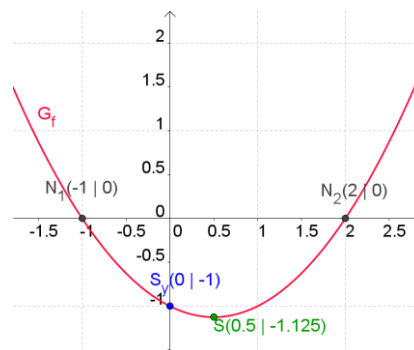
Scheitel  $S(0,5 | -1,125)$

$S_y(0 | -1)$

$ID_f = \mathbb{R}$  und  $W_f = [-1 ; \infty[$

Nullstellen:  $0,5x^2 - 0,5x - 1 = 0$

Mit Lösungsformel:  $N_1(-1 | 0)$  und  $N_2(2 | 0)$



**Potenzfunktion (n-ten Grades)**

nennt man Funktionen der Art  $f(x) = ax^n$ ,  
ihren Graphen nennt man **Parabel**  
(n-ter Ordnung; für  $n > 1$ ).

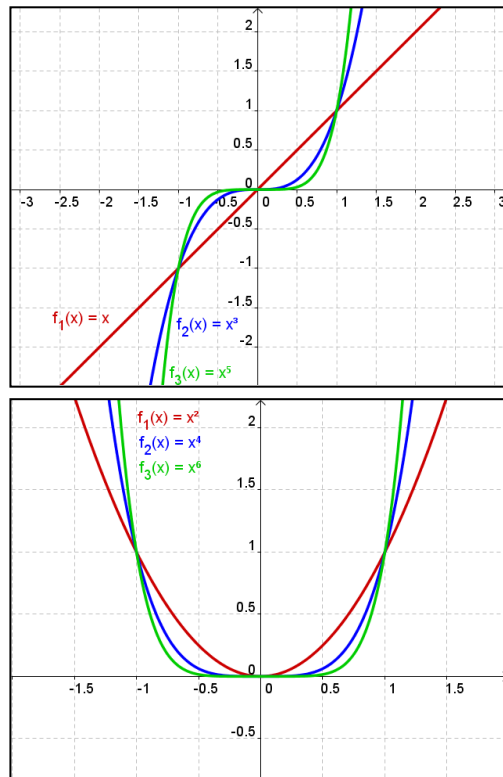
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$

Bilder:  $a = 1$

*Oben:* Exponent n ungerade  
 $D_f = \mathbb{R}$   $W_f = \mathbb{R}$   
Punktsymmetrie zum Ursprung  
Punkte  $(-1|-1)$ ,  $(0|0)$ ,  $(1|1)$

*Unten:* Exponent n gerade  
 $D_f = \mathbb{R}$   $W_f = \mathbb{R}_0^+$   
Achsensymmetrie zur y-Achse  
Punkte  $(-1|1)$ ,  $(0|0)$ ,  $(1|1)$

Je größer der Exponent n wird, desto  
„flacher“ verläuft der Graph im Ursprung.



**Funktionen (VII)**

**Potenz-  
funktionen**

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 122 f

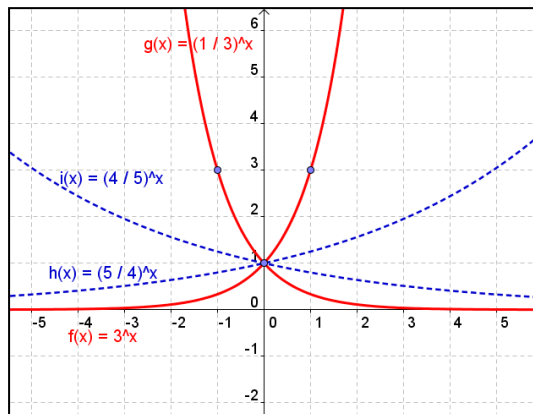
Eine Funktion f mit der Gleichung  
 $f(x) = a^x$  nennt man **Exponentialfunktion**.

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$   $D_f = \mathbb{R}$   $W_f = \mathbb{R}^+$

Es gilt:  $S_y(0|1)$

Für  $a > 1$  werden die Funktionswerte  
für  $x \rightarrow \infty$  immer größer.  
Für  $0 < a < 1$  werden die Funktionswerte  
für  $x \rightarrow \infty$  immer kleiner.

Die Graphen haben keine Nullstellen, die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.  
Die Graphen von  $f(x) = a^x$  und  $g(x) = (\frac{1}{a})^x$  sind zueinander achsensymmetrisch.



**Funktionen (VIII)**

**Exponential-  
funktionen**

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 66 ff

Eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  nennt man **ganzzrationale Funktion (Polynomfunktion) n-ten Grades.**

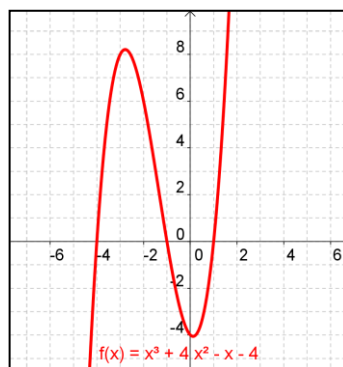
$a_n \neq 0$   
 $ID_f = \mathbb{R}$

Die reellen Zahlen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  heißen **Koeffizienten** des **Polynoms  $f(x)$ .**

**Beispiel:**  $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$   $S_y(0 | -4)$

Nullstellensuche:  $f(x) = 0$  für  $x_1 = 1$  (**Raten!**)

Weitere Nullstellen: **Polynomdivision** mit  $(x - 1)$ , dann Lösungsformel mit dem Restpolynom:



$$\begin{array}{r} (x^3 + 4x^2 - x - 4) : (x - 1) = x^2 + 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{- 4} \\ 5x^2 - x \phantom{- 4} \\ \underline{-(5x^2 - 5x)} \phantom{- 4} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

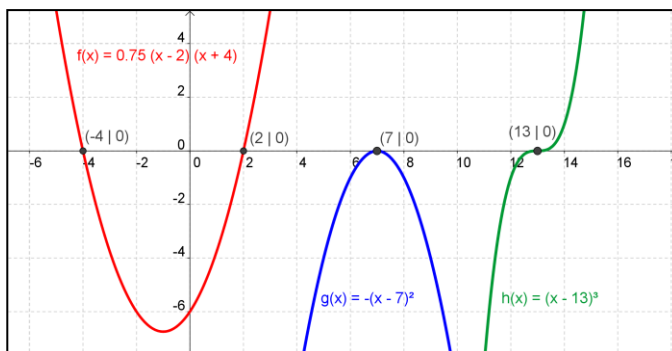
$x_2 = -4$  und  $x_3 = -1$

$N_1(1 | 0), N_2(-4 | 0), N_3(-1 | 0)$

**Weitere Beispiele:**

$f(x) = 0,75 \cdot (x-2) \cdot (x-4)$

Die Funktion zweiten Grades hat die beiden (**einfachen**) Nullstellen  $x_1 = -4$  und  $x_2 = 2$ , der Graph schneidet dort jeweils die x-Achse,  $f(x)$  wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen.



$g(x) = -(x-7)^2$   
Grad 2

Eine (**doppelte**) Nullstelle  $x_{1/2} = 7$ , der Graph berührt dort die x-Achse, es findet kein Vorzeichenwechsel statt!

$h(x) = (x-13)^3$   
Grad 3

Eine (**dreifache**) Nullstelle  $x_{1/2/3} = 13$ , der Graph schneidet die x-Achse, es findet ein Vorzeichenwechsel (von - nach +) statt!

**Allgemein:** Bei einer k-fachen Nullstelle...  
... findet ein **Vorzeichenwechsel** statt (**Schnitt**), wenn **k ungerade** ist!  
... findet **kein Vorzeichenwechsel** statt (**Berührung**), wenn **k gerade** ist!

Das **Verhalten** einer Polynomfunktion für **betragsgroße Werte von x** ist der Summand  $a_n x^n$  verantwortlich:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$  Für  $x \rightarrow \infty$  gilt  $f(x) \rightarrow \infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

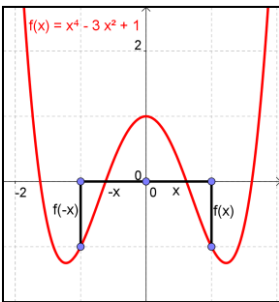
$g(x) = -3x^4 + 2x - 15$  Für  $x \rightarrow \infty$  gilt  $g(x) \rightarrow -\infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $g(x) \rightarrow -\infty$ .

Funktionen (IX)

Ganzzrationale Funktionen

Nullstellen

Verhalten im Unendlichen

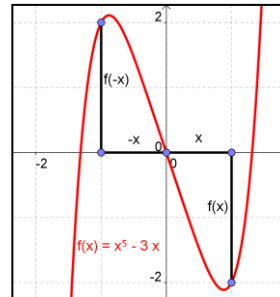


Eine Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt  $f(-x) = f(x)$

(für alle  $x \in D_f$ )  
(Bei Polynomfunktionen: nur **gerade** Exponenten)

Eine Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn gilt  $f(-x) = -f(x)$ .

(für alle  $x \in D_f$ )  
(Bei Polynomfunktionen: nur **ungerade** Exponenten)



Funktionen (IX)

(Fortsetzung)

Ganzrationale Funktionen

Symmetrie

**\*NEU\***

delta10  
Seite 118 ff

**Sinusfunktion:**

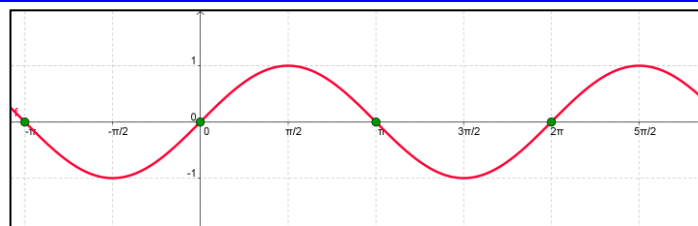
$y = \sin x$

$ID_f = \mathbb{R} \quad W_f = [-1 ; +1]$

Periodenlänge  $2\pi$

**Nullstellen** bei  $x_k = k \cdot \pi$

( $k \in \mathbb{Z}$ )



**Kosinusfunktion:**

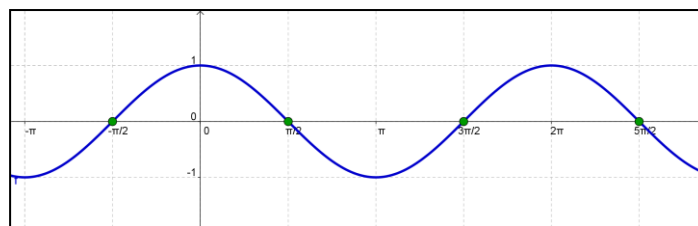
$y = \cos x$

$ID_f = \mathbb{R} \quad W_f = [-1 ; +1]$

Periodenlänge  $2\pi$

**Nullstellen** bei  $x_k = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

x-Achse: Winkel im **Bogenmaß** !



Die **allgemeine Sinus-/Kosinusfunktion:**

$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$       bzw.       $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x + c)] + d$

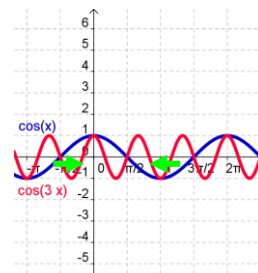
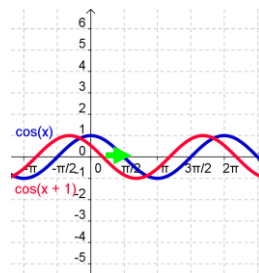
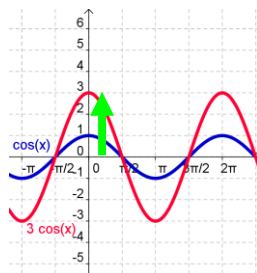
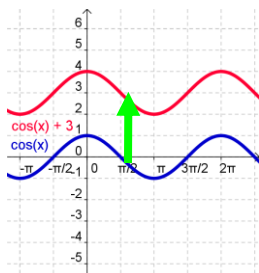
Die Periodenlänge ist nun  $\frac{2\pi}{|b|}$ .       $a \neq 0, b \neq 0$

$y = \cos x + d$   
**Verschiebung** um  $d$  in y-Richtung

$y = a \cdot \cos x$   
**Streckung** um  $|a|$  in y-Richtung

$y = \cos(x+c)$   
**Verschiebung** um  $-c$  in x-Richtung

$y = \cos(b \cdot x)$   
**Streckung** um  $1/|b|$  in x-Richtung



Analog: Die allgemeine Sinusfunktion.

Funktionen (X)

Sinusfunktion,  
Kosinusfunktion

**\*NEU\***

delta10  
Seite 40 ff

|  |   |
|--|---|
| <p><b>Euro:</b> 1 € = 100 ct      <b>Cent:</b> 1 ct = 0,01 €</p> <p><i>Beispiele:</i> 325 ct = 3,25 €      432 ct = 4,32 €</p> <p>4014 ct = 40,14 €      5 € 3 ct = 503 ct</p> | <p><b>Geld</b></p> <p><b>GRÖSSEN</b></p> <p>delta5<br/>Seite 14</p> |
|--|---|

|   |                       |                                   |                  |                       |                       |               |                        |           |                |                       |                                 |                  |                       |                       |              |                        |                |  |              |  |                |  |               |  |                        |  |                                   |  |  |  |  |  |   |
|---|-----------------------|-----------------------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|------------------------|-----------|----------------|-----------------------|---------------------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|------------------------|----------------|--|--------------|--|----------------|--|---------------|--|------------------------|--|-----------------------------------|--|--|--|--|--|---|
| <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>10 km</td> <td><b>km</b></td> <td>100 m</td> <td>10m</td> <td><b>m</b></td> <td><b>dm</b></td> <td><b>cm</b></td> <td><b>mm</b></td> </tr> <tr> <td>1 km = 1 000 m</td> <td><b>Kilometer (km)</b></td> <td>1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm</td> <td><b>Meter (m)</b></td> <td>1 dm = 10 cm = 100 mm</td> <td><b>Dezimeter (dm)</b></td> <td>1 cm = 10 mm</td> <td><b>Zentimeter (cm)</b></td> </tr> <tr> <td>1 m = 0,001 km</td> <td></td> <td>1 dm = 0,1 m</td> <td></td> <td>1 m = 0,001 km</td> <td></td> <td>1 cm = 0,01 m</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 cm = 0,1 dm = 0,01 m</td> <td></td> <td>1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | 10 km                 | <b>km</b>                         | 100 m            | 10m                   | <b>m</b>              | <b>dm</b>     | <b>cm</b>              | <b>mm</b> | 1 km = 1 000 m | <b>Kilometer (km)</b> | 1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm | <b>Meter (m)</b> | 1 dm = 10 cm = 100 mm | <b>Dezimeter (dm)</b> | 1 cm = 10 mm | <b>Zentimeter (cm)</b> | 1 m = 0,001 km |  | 1 dm = 0,1 m |  | 1 m = 0,001 km |  | 1 cm = 0,01 m |  | 1 cm = 0,1 dm = 0,01 m |  | 1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m |  |  |  |  |  | <p><b>Länge</b></p> <p><b>GRÖSSEN</b></p> <p>delta5<br/>Seite 146</p> |
| 10 km   | <b>km</b>             | 100 m                             | 10m              | <b>m</b>              | <b>dm</b>             | <b>cm</b>     | <b>mm</b>              |           |                |                       |                                 |                  |                       |                       |              |                        |                |  |              |  |                |  |               |  |                        |  |                                   |  |  |  |  |  |   |
| 1 km = 1 000 m  | <b>Kilometer (km)</b> | 1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm   | <b>Meter (m)</b> | 1 dm = 10 cm = 100 mm | <b>Dezimeter (dm)</b> | 1 cm = 10 mm  | <b>Zentimeter (cm)</b> |           |                |                       |                                 |                  |                       |                       |              |                        |                |  |              |  |                |  |               |  |                        |  |                                   |  |  |  |  |  |   |
| 1 m = 0,001 km  |                       | 1 dm = 0,1 m                      |                  | 1 m = 0,001 km        |                       | 1 cm = 0,01 m |                        |           |                |                       |                                 |                  |                       |                       |              |                        |                |  |              |  |                |  |               |  |                        |  |                                   |  |  |  |  |  |   |
| 1 cm = 0,1 dm = 0,01 m  |                       | 1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m |                  |                       |                       |               |                        |           |                |                       |                                 |                  |                       |                       |              |                        |                |  |              |  |                |  |               |  |                        |  |                                   |  |  |  |  |  |   |

|   |                  |                |                        |                |                       |                |          |                |                  |           |                |                  |                |  |                |                       |                |  |                |                  |  |  |                |                        |  |  |  |  |  |  |   |
|---|------------------|----------------|------------------------|----------------|-----------------------|----------------|----------|----------------|------------------|-----------|----------------|------------------|----------------|--|----------------|-----------------------|----------------|--|----------------|------------------|--|--|----------------|------------------------|--|--|--|--|--|--|---|
| <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><b>t</b></td> <td>100 kg</td> <td>10 kg</td> <td><b>kg</b></td> <td>100 g</td> <td>10 g</td> <td><b>g</b></td> <td>100 mg</td> <td>10 mg</td> <td><b>mg</b></td> </tr> <tr> <td>1 t = 1 000 kg</td> <td><b>Tonne (t)</b></td> <td>1 kg = 0,001 t</td> <td></td> <td>1 kg = 1 000 g</td> <td><b>Kilogramm (kg)</b></td> <td>1 g = 0,001 kg</td> <td></td> <td>1 g = 1 000 mg</td> <td><b>Gramm (g)</b></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>1 mg = 0,001 g</td> <td><b>Milligramm (mg)</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | <b>t</b>         | 100 kg         | 10 kg                  | <b>kg</b>      | 100 g                 | 10 g           | <b>g</b> | 100 mg         | 10 mg            | <b>mg</b> | 1 t = 1 000 kg | <b>Tonne (t)</b> | 1 kg = 0,001 t |  | 1 kg = 1 000 g | <b>Kilogramm (kg)</b> | 1 g = 0,001 kg |  | 1 g = 1 000 mg | <b>Gramm (g)</b> |  |  | 1 mg = 0,001 g | <b>Milligramm (mg)</b> |  |  |  |  |  |  | <p><b>Masse</b></p> <p><b>GRÖSSEN</b></p> <p>delta5<br/>Seite 148</p> |
| <b>t</b>  | 100 kg           | 10 kg          | <b>kg</b>              | 100 g          | 10 g                  | <b>g</b>       | 100 mg   | 10 mg          | <b>mg</b>        |           |                |                  |                |  |                |                       |                |  |                |                  |  |  |                |                        |  |  |  |  |  |  |   |
| 1 t = 1 000 kg  | <b>Tonne (t)</b> | 1 kg = 0,001 t |                        | 1 kg = 1 000 g | <b>Kilogramm (kg)</b> | 1 g = 0,001 kg |          | 1 g = 1 000 mg | <b>Gramm (g)</b> |           |                |                  |                |  |                |                       |                |  |                |                  |  |  |                |                        |  |  |  |  |  |  |   |
|   |                  | 1 mg = 0,001 g | <b>Milligramm (mg)</b> |                |                       |                |          |                |                  |           |                |                  |                |  |                |                       |                |  |                |                  |  |  |                |                        |  |  |  |  |  |  |   |

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>1 a = 12 Monate</p> <p>1 a = 52 Wochen</p> <p>1 a = 365 d (Schaltjahr: 366 d)</p> | <p>1 d = 24 h (Tag)</p> <p>1 h = 60 min (Stunde)</p> <p>1 min = 60 s (Minute, Sekunde)</p> | <p><b>Zeit</b></p> <p><b>GRÖSSEN</b></p> <p>delta5<br/>Seite 150</p> |
|--|--|--|

|   |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--------------------------|-----------|-----------|----------|-------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--|-------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------------------------------------|---------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------------------------|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|---------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-----------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td><b>km<sup>2</sup></b></td> <td>10 ha</td> <td><b>ha</b></td> <td>10 a</td> <td><b>a</b></td> <td>10 m<sup>2</sup></td> <td><b>m<sup>2</sup></b></td> <td>10 dm<sup>2</sup></td> <td><b>dm<sup>2</sup></b></td> <td>10 cm<sup>2</sup></td> <td><b>cm<sup>2</sup></b></td> <td>10 mm<sup>2</sup></td> <td><b>mm<sup>2</sup></b></td> </tr> <tr> <td>1 km<sup>2</sup> = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m<sup>2</sup></td> <td><b>Quadratkilometer</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 ha = 100 a = 10 000 m<sup>2</sup></td> <td><b>Hektar</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 a = 100 m<sup>2</sup></td> <td><b>Ar</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 m<sup>2</sup> = 100 dm<sup>2</sup> = 10 000 cm<sup>2</sup> = 1 000 000 mm<sup>2</sup>;</td> <td><b>Quadratmeter</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 dm<sup>2</sup> = 100 cm<sup>2</sup> = 10 000 mm<sup>2</sup></td> <td><b>Quadratdezimeter</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 cm<sup>2</sup> = 100 mm<sup>2</sup></td> <td><b>Quadratzentimeter</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 ha = 0,01 km<sup>2</sup></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 a = 0,01 ha = 0,0001 km<sup>2</sup></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 m<sup>2</sup> = 0,01 a = 0,0001 ha = 0,000001 km<sup>2</sup></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 dm<sup>2</sup> = 0,01 m<sup>2</sup></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 cm<sup>2</sup> = 0,01 dm<sup>2</sup> = 0,0001 m<sup>2</sup></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 mm<sup>2</sup> = 0,01 cm<sup>2</sup> = 0,0001 dm<sup>2</sup> = 0,000001 m<sup>2</sup></td> <td><b>Quadratmillimeter</b></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | <b>km<sup>2</sup></b>    | 10 ha     | <b>ha</b> | 10 a     | <b>a</b>          | 10 m <sup>2</sup>    | <b>m<sup>2</sup></b> | 10 dm <sup>2</sup>    | <b>dm<sup>2</sup></b> | 10 cm <sup>2</sup>    | <b>cm<sup>2</sup></b> | 10 mm <sup>2</sup>    | <b>mm<sup>2</sup></b> | 1 km <sup>2</sup> = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m <sup>2</sup> | <b>Quadratkilometer</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 ha = 100 a = 10 000 m <sup>2</sup> | <b>Hektar</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 a = 100 m <sup>2</sup> | <b>Ar</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 m <sup>2</sup> = 100 dm <sup>2</sup> = 10 000 cm <sup>2</sup> = 1 000 000 mm <sup>2</sup> ; | <b>Quadratmeter</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 dm <sup>2</sup> = 100 cm <sup>2</sup> = 10 000 mm <sup>2</sup> | <b>Quadratdezimeter</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 cm <sup>2</sup> = 100 mm <sup>2</sup> | <b>Quadratzentimeter</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 ha = 0,01 km <sup>2</sup> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 a = 0,01 ha = 0,0001 km <sup>2</sup> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 m <sup>2</sup> = 0,01 a = 0,0001 ha = 0,000001 km <sup>2</sup> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 dm <sup>2</sup> = 0,01 m <sup>2</sup> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 cm <sup>2</sup> = 0,01 dm <sup>2</sup> = 0,0001 m <sup>2</sup> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 mm <sup>2</sup> = 0,01 cm <sup>2</sup> = 0,0001 dm <sup>2</sup> = 0,000001 m <sup>2</sup> | <b>Quadratmillimeter</b> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | <p><b>Fläche</b></p> <p><b>GRÖSSEN</b></p> <p>delta5<br/>Seite 178</p> |
| <b>km<sup>2</sup></b>   | 10 ha                    | <b>ha</b> | 10 a      | <b>a</b> | 10 m <sup>2</sup> | <b>m<sup>2</sup></b> | 10 dm <sup>2</sup>   | <b>dm<sup>2</sup></b> | 10 cm <sup>2</sup>    | <b>cm<sup>2</sup></b> | 10 mm <sup>2</sup>    | <b>mm<sup>2</sup></b> |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 km <sup>2</sup> = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m <sup>2</sup>  | <b>Quadratkilometer</b>  |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 ha = 100 a = 10 000 m <sup>2</sup>  | <b>Hektar</b>            |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 a = 100 m <sup>2</sup>  | <b>Ar</b>                |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 m <sup>2</sup> = 100 dm <sup>2</sup> = 10 000 cm <sup>2</sup> = 1 000 000 mm <sup>2</sup> ;   | <b>Quadratmeter</b>      |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 dm <sup>2</sup> = 100 cm <sup>2</sup> = 10 000 mm <sup>2</sup>  | <b>Quadratdezimeter</b>  |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 cm <sup>2</sup> = 100 mm <sup>2</sup>   | <b>Quadratzentimeter</b> |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 ha = 0,01 km <sup>2</sup>   |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 a = 0,01 ha = 0,0001 km <sup>2</sup>  |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 m <sup>2</sup> = 0,01 a = 0,0001 ha = 0,000001 km <sup>2</sup>  |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 dm <sup>2</sup> = 0,01 m <sup>2</sup>   |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 cm <sup>2</sup> = 0,01 dm <sup>2</sup> = 0,0001 m <sup>2</sup>  |                          |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 mm <sup>2</sup> = 0,01 cm <sup>2</sup> = 0,0001 dm <sup>2</sup> = 0,000001 m <sup>2</sup>   | <b>Quadratmillimeter</b> |           |           |          |                   |                      |                      |                       |                       |                       |                       |                       |                       |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                                      |               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                          |           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                             |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |                          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Geschwindigkeit

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{18} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Volumen

|                       |                      |                |                        |                       |                 |                        |                       |                 |                        |                       |                 |
|-----------------------|----------------------|----------------|------------------------|-----------------------|-----------------|------------------------|-----------------------|-----------------|------------------------|-----------------------|-----------------|
| 100<br>m <sup>3</sup> | 10<br>m <sup>3</sup> | m <sup>3</sup> | 100<br>dm <sup>3</sup> | 10<br>dm <sup>3</sup> | dm <sup>3</sup> | 100<br>cm <sup>3</sup> | 10<br>cm <sup>3</sup> | cm <sup>3</sup> | 100<br>mm <sup>3</sup> | 10<br>mm <sup>3</sup> | mm <sup>3</sup> |
|                       |                      |                |                        |                       |                 |                        |                       |                 |                        |                       |                 |

1 km<sup>3</sup> = 1 000 000 000 m<sup>3</sup>

1 m<sup>3</sup> = 1 000 dm<sup>3</sup> = 1 000 000 cm<sup>3</sup> = 1 000 000 000 mm<sup>3</sup>

1 dm<sup>3</sup> = 1 000 cm<sup>3</sup> = 1 000 000 mm<sup>3</sup>

1 cm<sup>3</sup> = 1 000 mm<sup>3</sup>

Kubikkilometer

Kubikmeter

Kubikdezimeter

Kubikzentimeter

GRÖSSEN

1 m<sup>3</sup> = 0,000 000 001 km<sup>3</sup>

1 dm<sup>3</sup> = 0,001 m<sup>3</sup>

1 cm<sup>3</sup> = 0,001 dm<sup>3</sup> = 0,000 001 m<sup>3</sup>

1 mm<sup>3</sup> = 0,001 cm<sup>3</sup> = 0,000 001 dm<sup>3</sup> = 0,000 000 001 m<sup>3</sup>

Kubikmillimeter

1 hl = 100 l

Hektoliter

10 hl = 1000 l = 1 000 dm<sup>3</sup> = 1 m<sup>3</sup>

1 l = 1 dm<sup>3</sup> = 0,01 hl

Liter

1 ml = 1 cm<sup>3</sup> = 0,001 l

Milliliter

delta6  
Seite 152/160

Gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen ... einer Größe das Doppelte, Dreifache, Vierfache ... einer anderen Größe, so kann man von einem Vielfachen der einen Größe auf das entsprechende Vielfache der anderen Größe schließen.

| Eiskugeln | Preis  |
|-----------|--------|
| 1         | 0,70 € |
| 2         | 1,40 € |
| 4         | 2,80 € |
| 8         | 5,60 € |

Beispiele:

- 1) Herr Maier zahlt für 25 Liter Benzin 29,75 €. Wie viel kosten 40 Liter?

**Lösung:** 25 Liter kosten 29,75 €. 1 Liter kostet (29,75 € : 25 =) 1,19 € („Schluss auf die Einheit“). 40 Liter kosten dann (40 • 1,19 € =) 47,60 € .

- 2) Frau Maier erbt 30600 € (das sind 45% des gesamten Vermögens) von ihrem Opa. Wie groß war das Vermögen?

**Lösung:** 45% des Vermögens entsprechen 30600 €. 1 % seines Monatsgehalts entspricht (30600 € : 45 =) 680 € („Schluss auf die Einheit“). 100% des Vermögens entsprechen somit (100 • 680 € =) 68000 € .

Dreisatz

RECHNEN MIT GRÖSSEN

delta6  
Seite 220

**Addieren und Subtrahieren von Größen in Kommaschreibweise**

- ✓ Alle Größen müssen in der gleichen Maßeinheit angegeben werden.
- ✓ Es wird stellenweise addiert bzw. subtrahiert.
- ✓ Im Endergebnis wird das Komma an die entsprechende Stelle gesetzt.

Beispiele:

|            |            |
|------------|------------|
| 2,950 kg   | 3,860 kg   |
| + 0,183 kg | - 0,073 kg |
| 2,767 kg   | 3,787 kg   |

**Multiplizieren von Größen mit natürlichen Zahlen**

- ✓ Die Maßzahl sollte eine natürliche Zahl sein. Notfalls die Größe in eine kleinere Einheit umwandeln.
- ✓ Die beiden natürlichen Zahlen multiplizieren.
- ✓ Den Produktwert in eine größere Maßeinheit umwandeln (unter Verwendung der Kommaschreibweise).

Beispiel:  $8 \cdot 2,84 \text{ kg} = 8 \cdot 2840 \text{ g} = 22\,720 \text{ g} = 22,72 \text{ kg}$

**Multiplizieren von Größen mit Zehnerstufenzahlen**

- ✓ Das Komma bei der gegebenen Größe um so viele Stellen nach **rechts** verschieben, wie die Zehnerstufenzahl Nullen besitzt.

Beispiel:  $1\,000 \cdot 5,8572 \text{ km} = 5857,2 \text{ km}$   
(Das Komma ist um **drei** Stellen nach rechts gerückt.)

**Dividieren von Größen durch natürliche Zahlen**

- ✓ Die Maßzahl sollte eine natürliche Zahl sein. Notfalls den Dividenden in eine kleinere Einheit umwandeln.
- ✓ Die beiden natürlichen Zahlen dividieren.
- ✓ Den Quotientenwert in eine größere Maßeinheit umwandeln (unter Verwendung der Kommaschreibweise).

Beispiel:  $19,76 \text{ €} : 13 = 1\,976 \text{ ct} : 13 = 152 \text{ ct} = 1,52 \text{ €}$

**Dividieren von Größen durch Zehnerstufenzahlen**

- ✓ Das Komma im Dividenden um so viele Stellen nach **links** verschieben, wie die Zehnerstufenzahl Nullen besitzt.

Beispiele:  $8345,7 \text{ km} : 100 = 83,457 \text{ km}$ .  
(Das Komma ist um **zwei** Stellen nach links gerückt.)

**RECHNEN MIT GRÖSSEN**

delta5  
Seite 152ff

Beispiele:

| Maßstab                            | 1 : 30               | 1 : 80 000                  | 2 : 1                  |
|------------------------------------|----------------------|-----------------------------|------------------------|
| Länge der Strecke in Wirklichkeit  | 90 m                 | 16 km                       | 13 mm                  |
| Länge der Strecke in der Abbildung | (90 m : 30 =)<br>3 m | (16 km : 80 000 =)<br>20 cm | (13 mm · 2 =)<br>26 mm |
| Vergrößerung oder Verkleinerung?   | Verkleinerung        | Verkleinerung               | Vergrößerung           |

**Maßstab**

**RECHNEN MIT GRÖSSEN**

delta5  
Seite 164

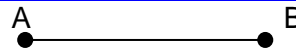
|   |  |
|---|--|
| <p><b>Quadrat</b> <b>Rechteck</b> <b>Raute</b> <b>Parallelogramm</b> <b>Trapez</b> <b>Kreis</b></p> <p><b>Seite</b><br/><b>Diagonale</b></p> <p><b>Ecke</b></p> <p><b>Radius</b><br/><b>Mittelpunkt</b></p> <p><b>Durchmesser</b></p> | <p><b>Geometrische Grundfiguren</b></p> <p><b>GEOMETRIE</b></p> <p>delta5<br/>Seite 72</p> |
|---|--|

|   |   |
|---|---|
| <p><b>Würfel</b> <b>Quader</b> <b>Zylinder</b> <b>Kugel</b></p> <p><b>Kante</b></p> <p><b>Ecke</b></p> <p><b>Fläche</b></p> <p><b>Prisma</b> <b>Kegel</b> <b>Pyramide</b></p> | <p><b>Geometrische Grundkörper</b></p> <p><b>GEOMETRIE</b></p> <p>delta5<br/>Seite 72</p> |
|---|---|

|   |   |   |
|---|---|---|
| <p><b>y-Achse</b></p> <p>II. Quadrant</p> <p>I. Quadrant</p> <p>III. Quadrant</p> <p>IV. Quadrant</p> <p><b>x-Achse</b></p> | <p><b>x-Koordinate</b></p> <p><b>P (-1,5   1,5)</b></p> <p><b>Q (2   2)</b></p> <p><b>R (-1   -2)</b></p> <p><b>S (3   -1)</b></p> <p><b>y-Koordinate</b></p> | <p><b>Koordinaten-system</b></p> <p><b>GEOMETRIE</b></p> <p>delta5<br/>Seite 86</p> |
|---|---|---|



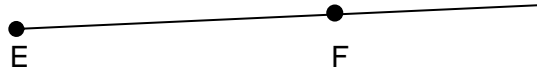
Strecke **[AB]** mit den Endpunkten A und B  
und der Streckenlänge  $\overline{AB} = 3,2 \text{ cm}$



Gerade **CD**



Halbgerade (Strahl) **[EF]**  
mit Anfangspunkt E



Strecke, Gerade,  
Halbgerade

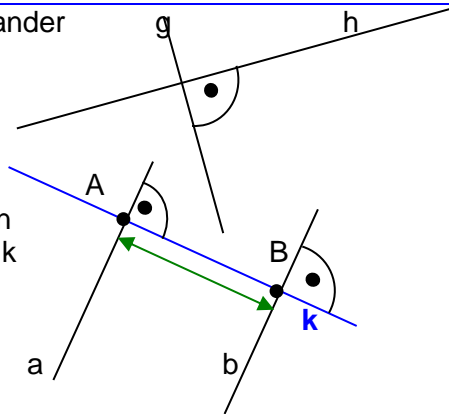
GEOMETRIE

delta5  
Seite 74

Geraden, Halbgeraden oder Strecken, die miteinander  
einen rechten Winkel bilden, stehen **aufeinander  
senkrecht**.

Schreibweise:  $g \perp h$

Zwei Geraden a und b (der Zeichenebene) heißen  
**zueinander parallel**, wenn es eine dritte Gerade k  
gibt, die auf jeder der beiden senkrecht steht.



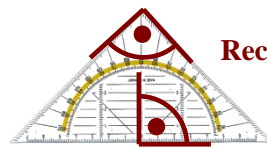
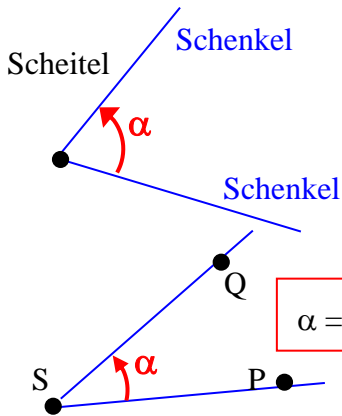
Schreibweise:  $a \parallel b$

Abstand d der Geraden a und b:  $d = \overline{AB}$

Senkrecht,  
parallel

GEOMETRIE

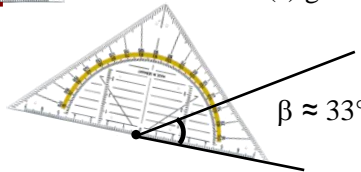
delta5  
Seite 76



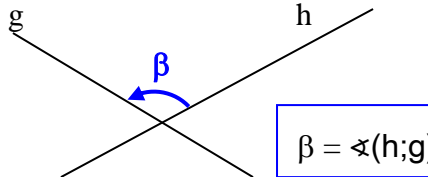
Rechte Winkel ( $90^\circ$ ) am Geodreieck

Die Größe eines Winkels  
wird in Grad ( $^\circ$ ) gemessen.

Winkel messen:



$$\alpha = \sphericalangle PSQ$$



$$\beta = \sphericalangle (h;g)$$

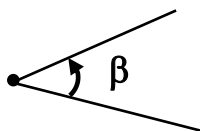
Winkel (I)

GEOMETRIE

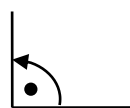
delta5  
Seite 82



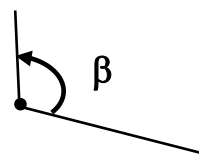
Nullwinkel  
 $\beta = 0^\circ$



Spitzer Winkel  
 $0^\circ < \beta < 90^\circ$



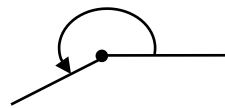
Rechter Winkel  
 $\beta = 90^\circ$



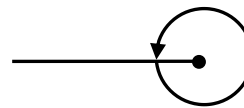
Stumpfer Winkel  
 $90^\circ < \beta < 180^\circ$



Gestreckter Winkel  
 $\beta = 180^\circ$



Überstumpfer Winkel  
 $180^\circ < \beta < 360^\circ$

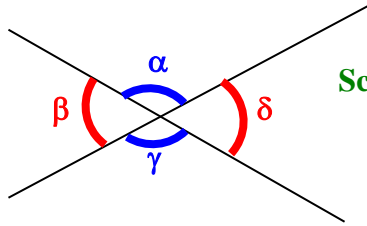


Vollwinkel  $\beta = 360^\circ$

Winkel (II)  
Bezeich-  
nungen

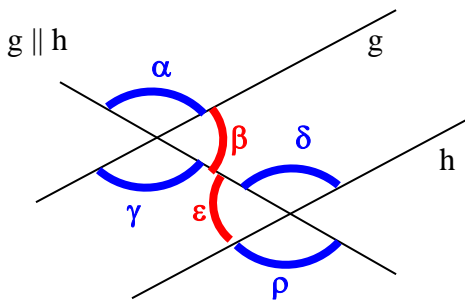
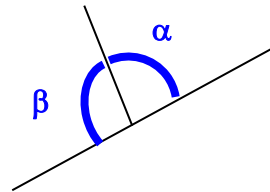
GEOMETRIE

delta5  
Seite 82



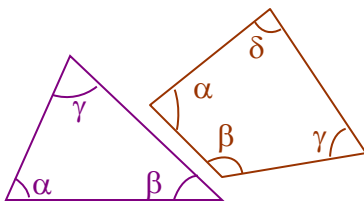
**Scheitelwinkel** sind gleich groß:  $\alpha = \gamma$  und  $\beta = \delta$

**Nebenwinkel** ergeben zusammen  $180^\circ$ :  $\alpha + \gamma = 180^\circ$



**Wechselwinkel** an parallelen Geraden sind gleich groß:  $\alpha = \rho$  oder  $\gamma = \delta$  oder  $\beta = \epsilon$

**Stufenwinkel** an parallelen Geraden sind gleich groß:  $\alpha = \delta$  oder  $\gamma = \rho$



Die **Winkelsumme** der Innenwinkel ...

...jedes Dreiecks beträgt  $180^\circ$ ;  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

...jedes Vierecks beträgt  $360^\circ$ ;  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

...jedes n-Ecks beträgt  $(n-2) \cdot 180^\circ$  ( $n > 2$ )

Winkel (III)

Gesetze

GEOMETRIE

delta7  
Seite 38

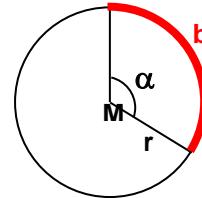
delta7  
Seite 42

delta7  
Seite 46 / 52

Der Wert des Quotienten aus Bogen- und Radiuslänge

$\frac{b}{r}$  eignet sich als Winkelmaß,  $\frac{b}{r}$  ist eine reelle Zahl.

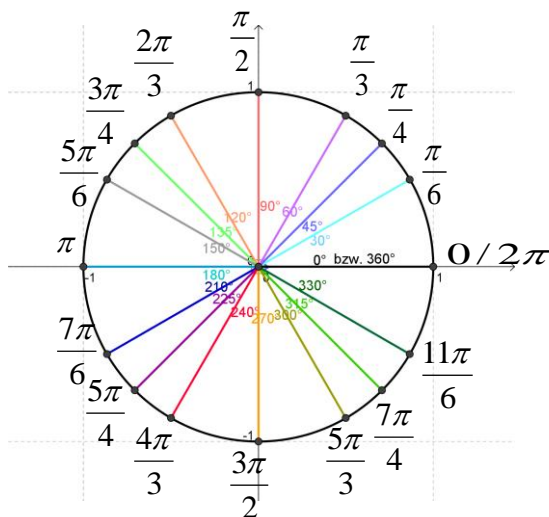
Statt den Winkel  $a$  in Grad anzugeben, kann man die Maßzahl der zugehörigen Bogenlänge am Einheitskreis ( $r = 1$  LE) verwenden.



Dieses Winkelmaß heißt **Bogenmaß**,

Umrechnung:  $\frac{\pi \alpha}{180^\circ}$

Tabelle:



|             |               |        |
|-------------|---------------|--------|
| $0^\circ$   | $0 \pi$       | 0      |
| $30^\circ$  | $1/6 \pi$     | 0,5236 |
| $45^\circ$  | $1/4 \pi$     | 0,7854 |
| $60^\circ$  | $1/3 \pi$     | 1,0472 |
| $90^\circ$  | $1/2 \pi$     | 1,5708 |
| $120^\circ$ | $2/3 \pi$     | 2,0944 |
| $135^\circ$ | $3/4 \pi$     | 2,3562 |
| $150^\circ$ | $5/6 \pi$     | 2,618  |
| $180^\circ$ | $\pi$         | 3,1416 |
| $210^\circ$ | $1 \ 1/6 \pi$ | 3,6652 |
| $225^\circ$ | $1 \ 1/4 \pi$ | 3,927  |
| $240^\circ$ | $1 \ 1/3 \pi$ | 4,1888 |
| $270^\circ$ | $1 \ 1/2 \pi$ | 4,7124 |
| $300^\circ$ | $1 \ 2/3 \pi$ | 5,236  |
| $315^\circ$ | $1 \ 3/4 \pi$ | 5,4978 |
| $330^\circ$ | $1 \ 5/6 \pi$ | 5,7596 |
| $360^\circ$ | $2 \pi$       | 6,2832 |

Bogenmaß

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 10 ff

Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen; die Faltkante heißt dann **Symmetrieachse**.

Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.

$$\overline{AC} = \overline{A^*C^*}$$

$$r = r^*$$

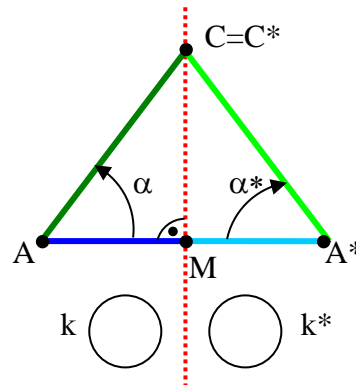
Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

$$\overline{AM} = \overline{MA^*}$$



Achsen-symmetrie

GEOMETRIE

delta5  
Seite 92

delta7  
Seite 10 ff

Wenn eine Figur bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z (**Symmetriezentrum**) mit sich zur Deckung kommt, so heißt diese Figur **punktsymmetrisch**.

Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und zueinander parallel.

$$\overline{PR} = \overline{P^*R^*}$$

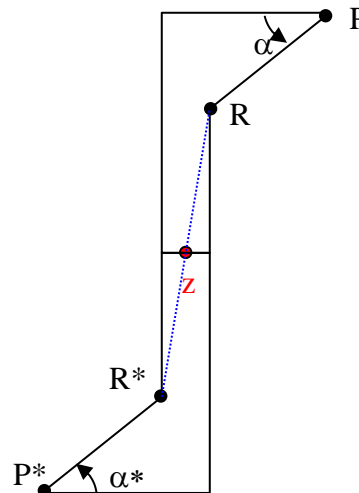
$$\overline{PR} \parallel \overline{P^*R^*}$$

Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß und haben gleichen Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.

$$\overline{ZR} = \overline{ZR^*}$$

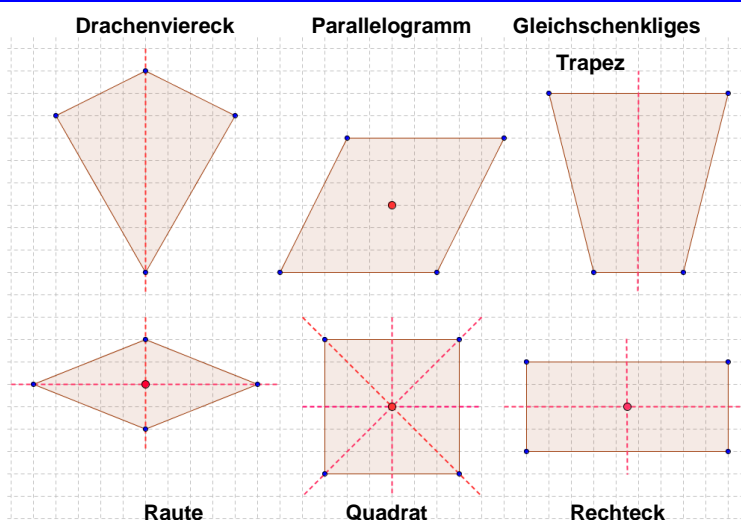


Punkt-symmetrie

GEOMETRIE

delta5  
Seite 92

delta7  
Seite 24 ff



Symmetrische Vierecke

GEOMETRIE

delta5  
Seite 72

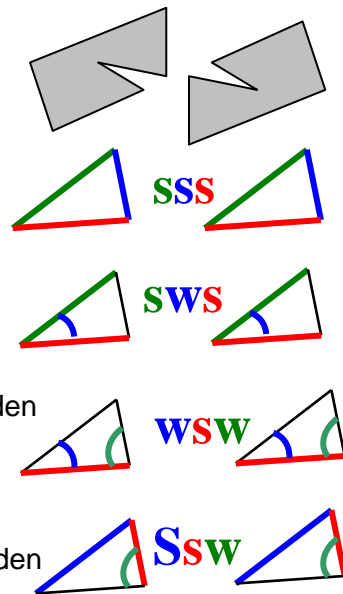
delta7  
Seite 28 ff

Lassen sich zwei Figuren vollständig miteinander zur Deckung bringen, so heißen sie **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent**.

**Kongruenzsätze für Dreiecke**

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie...

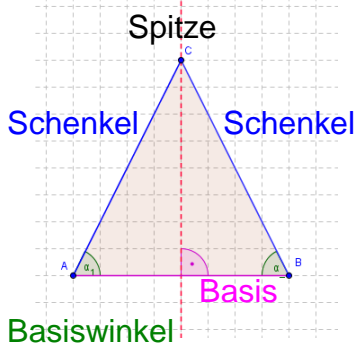
- ✓ in den Längen der drei Seiten übereinstimmen (**sss-Satz**).
- ✓ in den Längen von zwei Seiten und in der Größe von deren Zwischenwinkel übereinstimmen (**sws-Satz**).
- ✓ in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen (**wsw-Satz**).
- ✓ in den Längen zweier Seiten und in der Größe des der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels übereinstimmen (**SsW-Satz**).



Kongruenz

GEOMETRIE

delta7  
Seite 148 ff

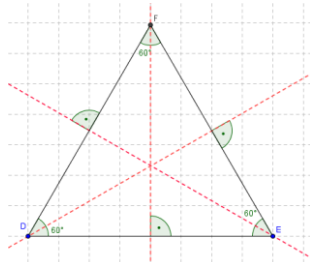


Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen **gleichschenkelig**.

**Eigenschaften:**

- ✓ Zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel).
- ✓ Die der Basis anliegenden Winkel (Basiswinkel) sind gleich groß.
- ✓ Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze und halbiert die Basis rechtwinklig.

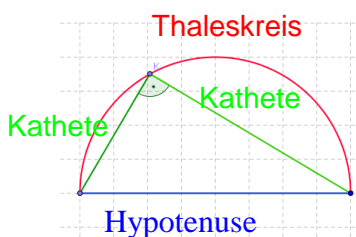
**Gleichseitige** Dreiecke haben drei gleich lange Seiten.



**Eigenschaften:**

- ✓ Alle Innenwinkel messen 60°.
- ✓ Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen; sie halbieren die Innenwinkel und halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig.

Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, heißen **rechtwinklig**.



**Eigenschaften:**

- ✓ Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser (**Thaleskreis**).
- ✓ Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite [AB] als Durchmesser liegt, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig und C der Scheitel des rechten Winkels.

Besondere Dreiecke

GEOMETRIE

delta7  
Seite 160 ff

delta7  
Seite 166 ff

Ein alter und berühmter Satz aus der Geometrie zeigt die Beziehung zwischen der Länge der Hypotenuse und den Längen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck:

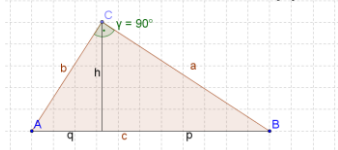
**Satz des Pythagoras:**  $c^2 = a^2 + b^2$

In Worten :

In einem rechtwinkligen Dreieck haben die beiden Quadrate über den beiden Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse!

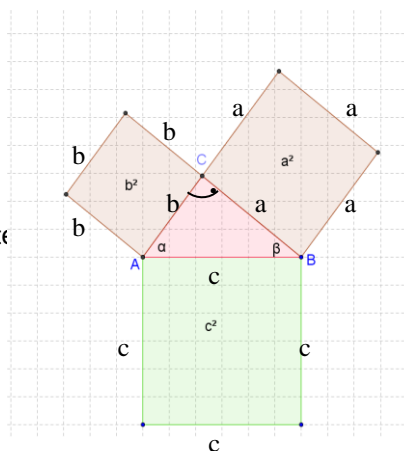
**Kathetensatz :**  $a^2 = c \cdot p$  und  $b^2 = c \cdot q$

**Höhensatz :**  $h^2 = q \cdot p$



**Satz des Pythagoras – Kehrsatz:**

Gilt für die Längen a, b und c in einem Dreieck die Gleichung  $c^2 = a^2 + b^2$ , so ist das Dreieck rechtwinklig.



Satz von Pythagoras

Höhensatz

Kathetensatz

GEOMETRIE

delta9  
Seite 29 ff

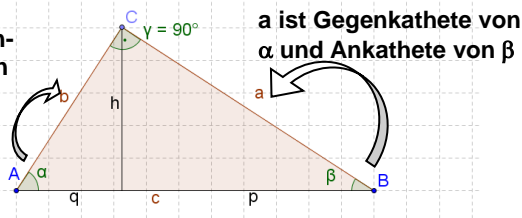
**Tangens eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}$

**Sinus eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

**Kosinus eines Winkels** =  $\frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{a}{b} & \tan \beta &= \frac{b}{a} \\ \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \sin \beta &= \frac{b}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \beta &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

b ist Gegenkathete von  $\beta$  und Ankathete von  $\alpha$



Tangens...  
Sinus...  
Kosinus...

...eines Winkels

GEOMETRIE

delta9  
Seite 125 ff

**Es gilt:**  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  und  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

**Außerdem:**  $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$  und  $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

| $\varphi$     | 0° oder 360°       | 30°                  | 45°            | 60°            | 90°                |
|---------------|--------------------|----------------------|----------------|----------------|--------------------|
| sin $\varphi$ | 0 = $1/2 \sqrt{0}$ | $1/2 = 1/2 \sqrt{1}$ | $1/2 \sqrt{2}$ | $1/2 \sqrt{3}$ | $1 = 1/2 \sqrt{4}$ |
| cos $\varphi$ | 1                  | $1/2 \sqrt{3}$       | $1/2 \sqrt{2}$ | 1/2            | 0                  |
| tan $\varphi$ | 0                  | $1/3 \sqrt{3}$       | 1              | $\sqrt{3}$     | -                  |

| $\varphi$     | 135°            | 180° | 225°            | 270° | 315°            |
|---------------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|
| sin $\varphi$ | $1/2 \sqrt{2}$  | 0    | $-1/2 \sqrt{2}$ | -1   | $-1/2 \sqrt{2}$ |
| cos $\varphi$ | $-1/2 \sqrt{2}$ | -1   | $-1/2 \sqrt{2}$ | 0    | $1/2 \sqrt{2}$  |
| tan $\varphi$ | -1              | 0    | 1               | -    | -1              |

tan, sin, cos  
Beziehungen

Besondere Winkel

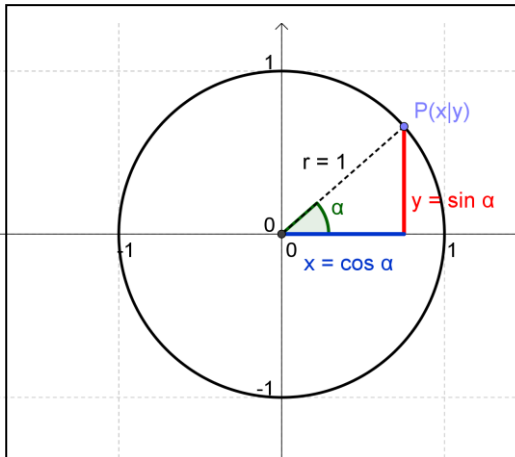
delta9  
Seite 134 ff

**\*NEU\***

delta10  
Seite 38 ff

Am Einheitskreis kann man die Werte von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  für beliebig große Winkel definieren:

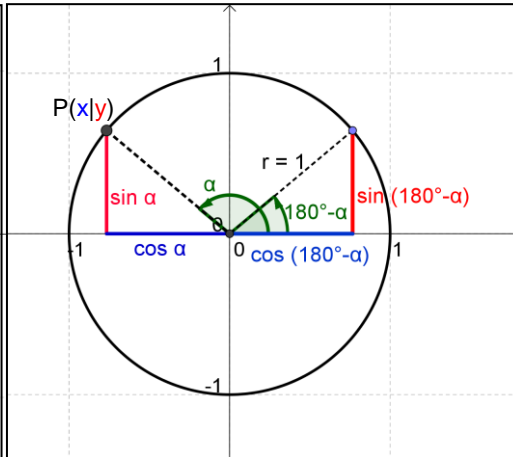
**I. Quadrant**, es gilt  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



$$x = \cos \alpha = \frac{x}{r} = x$$

$$y = \sin \alpha = \frac{y}{r} = y$$

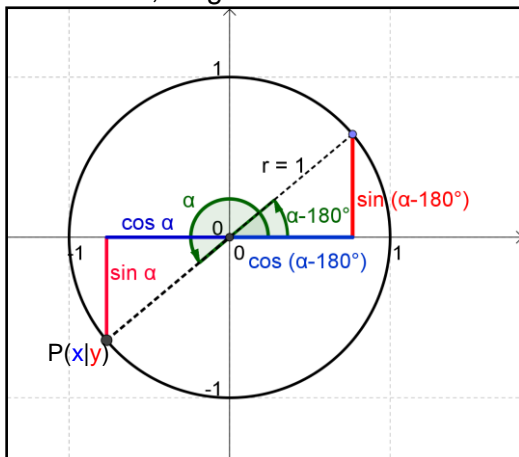
**II. Quadrant**, es gilt  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



$$x = \cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$$

$$y = \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

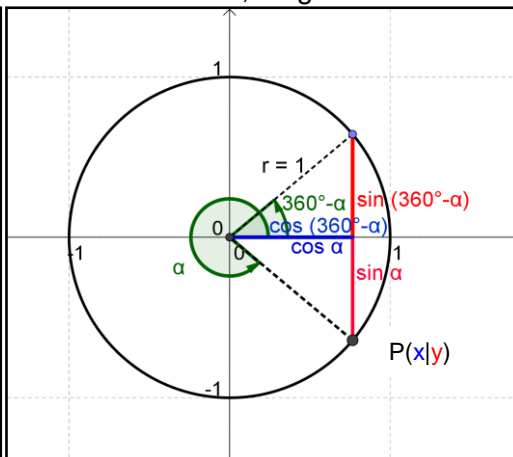
**III. Quadrant**, es gilt  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$



$$x = \cos \alpha = -\cos (\alpha - 180^\circ)$$

$$y = \sin \alpha = -\sin (\alpha - 180^\circ)$$

**IV. Quadrant**, es gilt  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$



$$x = \cos \alpha = \cos (360^\circ - \alpha)$$

$$y = \sin \alpha = -\sin (360^\circ - \alpha)$$

Für negative Winkel gilt:

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

Für Drehungen über  $360^\circ$  gilt:

$$\sin (\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos (\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{N})$$

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

**\*NEU\***  
delta10  
Seite 38 ff

Wird eine Originalfigur im Maßstab  $a$  ( $a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ ) vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur und die Originalfigur zueinander **ähnlich**. Der Maßstab  $a$  heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.

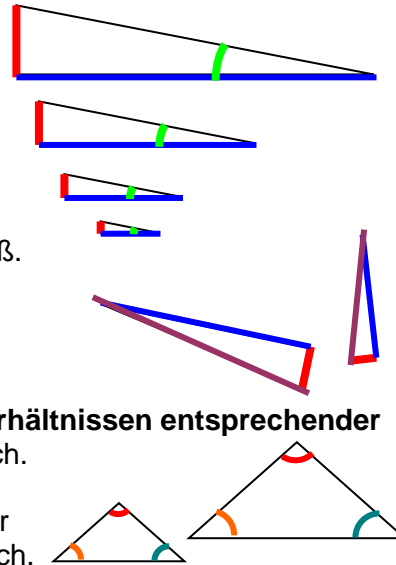
Für zueinander ähnliche Figuren gilt:

- Einander entsprechende **Winkel** sind stets gleich groß.
- Längenverhältnisse **einander entsprechender** Strecken sind stets gleich.

**Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in allen **Längenverhältnissen entsprechender Seiten** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.

Wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in den Größen aller **Winkel** übereinstimmen, dann sind sie zueinander ähnlich.



Ähnlichkeit

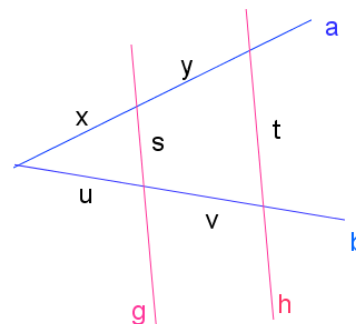
GEOMETRIE

delta8  
Seite 160 ff

**1. Strahlensatz**

Wenn zwei Halbgeraden bzw. zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen irgendwelcher zwei Abschnitte auf der einen (Halb-) Geraden ebenso wie die Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der anderen (Halb-) Geraden.

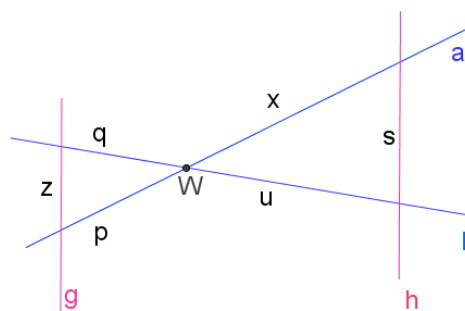
Beispiel:  $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$  oder  $\frac{x}{p} = \frac{u}{q}$



**2. Strahlensatz**

Wenn zwei Geraden a und b von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden, dann verhalten sich die Längen der Parallelstrecken wie die Längen der vom Punkt W bis zu ihnen hin verlaufenden Abschnitte auf der einen Geraden:

Beispiel:  $\frac{s}{t} = \frac{u}{u+v}$  oder  $\frac{s}{z} = \frac{x}{p}$



Strahlensätze

GEOMETRIE

delta8  
Seite 145 ff

Es gilt auch der **Kehrsatz des 1. Strahlensatzes**:

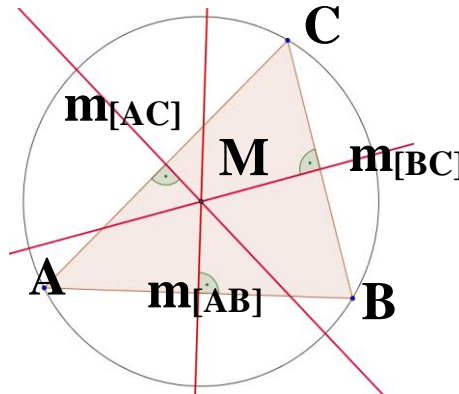
Werden zwei Geraden a und b, die einander im Punkt W schneiden von zwei Geraden g und h so geschnitten, dass das Verhältnis der Längen irgendwelcher zweier Abschnitte auf der Geraden a stets gleich dem Verhältnis der Längen der entsprechenden beiden Abschnitte auf der Geraden b ist, dann sind die beiden Geraden g und h zueinander parallel.

Der **Kehrsatz des 2. Strahlensatzes** gilt nicht.



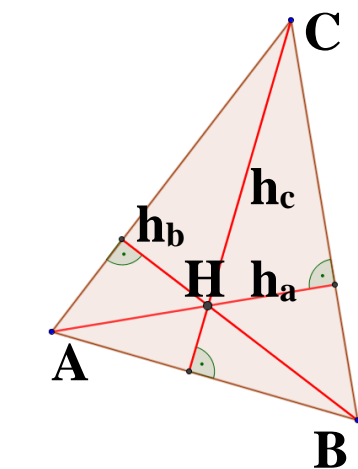
Alle Punkte (der Zeichenebene), die von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** (dem **Mittellot**)  $m_{[AB]}$  ihrer Verbindungsstrecke.

Die drei Mittelsenkrechten  $m_{[AB]}$ ,  $m_{[BC]}$  und  $m_{[CA]}$  eines Dreiecks ABC schneiden einander stets in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des **Umkreises** dieses Dreiecks. Die Punkte A, B und C sind von M gleich weit entfernt.



Besondere Linien im Dreieck

delta7  
Seite 180



Eine Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet, heißt **Höhe** dieses Dreiecks.

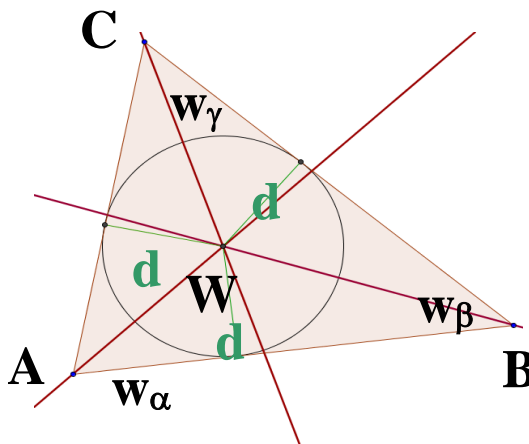
Jedes Dreieck besitzt somit drei Höhen  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$ ; sie schneiden einander in einem Punkt H.

GEOMETRIE

delta7  
Seite 184

Eine Gerade, die einen Dreiecksinnenwinkel halbiert, heißt **Winkelhalbierende** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Winkelhalbierende  $w_\alpha$ ,  $w_\beta$  und  $w_\gamma$ ; sie schneiden einander in einem Punkt W, der von den drei Seiten den gleichen Abstand d besitzt. W ist der Mittelpunkt des **Innkreises**.



delta7

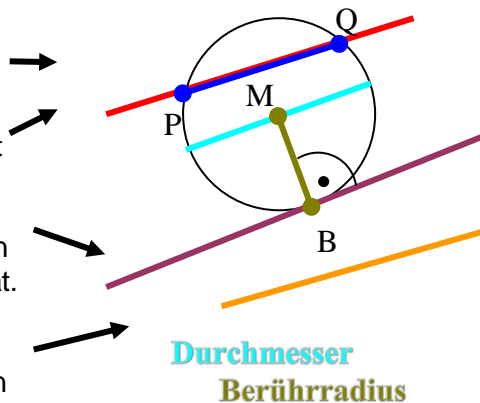
Seite 188

Eine Gerade heißt **Sekante** eines Kreises, wenn sie diesen Kreis in zwei Punkten schneidet.

Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt **Sehne** ([PQ]).

Eine Gerade heißt **Tangente** eines Kreises, wenn sie mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat. Dieser Punkt heißt **Berührungspunkt (B)**.

Eine Gerade heißt **Passante** eines Kreises, wenn sie mit diesem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat.



Kreis und Gerade

GEOMETRIE

delta7  
Seite 170 ff

Umfangslänge



| Rechteck  |  |  | Quadrat   |  |  | Kreis   |  |  | Flächeninhalt                |  |  |
|---|--|--|---|--|--|---|--|--|------------------------------|--|--|
|   |  |  |   |  |  |   |  |  |                              |  |  |
| <p>Breite b</p> <p>Länge l</p>  |  |  | <p>Seitenlänge a</p>  |  |  | <p>Radiuslänge r</p>  |  |  | <p><b>GEOMETRIE</b></p>      |  |  |
| <p><b>Umfangslänge:</b></p> $U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot l + 2 \cdot b$ $= 2 \cdot (l + b)$   |  |  | $U_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot a$  |  |  | $U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot r \cdot \pi$  |  |  | <p>delta5<br/>Seite 158</p>  |  |  |
| <p><i>Im Beispiel:</i></p> $U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot 1 \text{ cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} = \underline{8 \text{ cm}}$ $U_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot 3 \text{ cm} = \underline{12 \text{ cm}}$ $U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot 1,5 \text{ cm} \cdot \pi \approx \underline{9,42 \text{ cm}}$ |  |  |   |  |  | <p><b>Kreiszahl</b></p> $\pi \approx 3,14159265$  |  |  | <p>delta8<br/>Seite 14ff</p> |  |  |
| <p><b>Flächeninhalt:</b></p> $A_{\text{Rechteck}} = l \cdot b$ <p>(„Länge mal Breite“)</p>  |  |  | $A_{\text{Quadrat}} = a \cdot a = a^2$  |  |  | $A_{\text{Kreis}} = r^2 \cdot \pi$  |  |  | <p>delta5<br/>Seite 182</p>  |  |  |
| <p><i>Im Beispiel:</i></p> $A_{\text{Rechteck}} = 1 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$ $= \underline{3 \text{ cm}^2}$   |  |  | $A_{\text{Quadrat}} = 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$ $= \underline{9 \text{ cm}^2}$ |  |  | $A_{\text{Kreis}} = (1,5 \text{ cm})^2 \cdot \pi$ $\approx \underline{7,07 \text{ cm}^2}$ |  |  | <p>delta8<br/>Seite 38ff</p> |  |  |

| Kreisbogen   |  |  | Umfangslänge<br>Flächeninhalt                      |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
| <p>Radiuslänge r</p> <p>Mittelpunkt M</p> <p><math>\alpha</math>: Mittelpunktswinkel</p>   |  |  | <p><b>Kreisteile</b></p>                           |  |  |
| <p><b>Bogenlänge</b></p> $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$   |  |  | <p><b>GEOMETRIE</b></p>                            |  |  |
| <p><b>Sehne</b></p> $\frac{s}{r} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ <p>(Herleitung über rechtwinkliges Dreieck)</p> |  |  |  |  |  |
| <p><b>Kreisesektor</b></p> $A_{\text{Sektor}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$                              |  |  | <p><b>*NEU*</b></p> <p>delta10<br/>Seite 16 ff</p> |  |  |

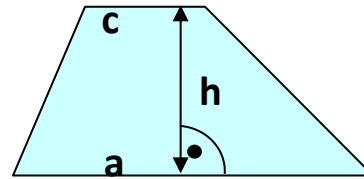
| Parallelogramm:   |  |  | Umfangslänge<br>Flächeninhalt |  |  |
|---|--|--|-------------------------------|--|--|
| <p>Jeweils zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel.</p> |  |  | <p><b>Parallelogramm</b></p>  |  |  |
| <p>Seitenlänge g („Grundseite“) – zugehörige Höhe h</p>                     |  |  | <p><b>GEOMETRIE</b></p>       |  |  |
| $A_{\text{Parallelogramm}} = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2$                 |  |  |                               |  |  |
| $U_{\text{Parallelogramm}} = 2g_1 + 2g_2 = 2(g_1 + g_2)$                    |  |  | <p>delta6<br/>Seite 130</p>   |  |  |

**Trapez:**

Zwei gegenüberliegende Seiten („Grundseiten“) sind parallel (hier a und c).

Höhe h: Abstand der parallelen Grundseiten

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h = \frac{a + c}{2} \cdot h$$



Umfangslänge  
Flächeninhalt  
Trapez

GEOMETRIE

delta6  
Seite 138

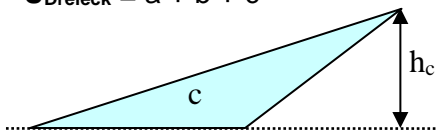
**Dreieck:**

Drei Ecken – drei Seiten („Grundseiten“) – drei Innenwinkel.

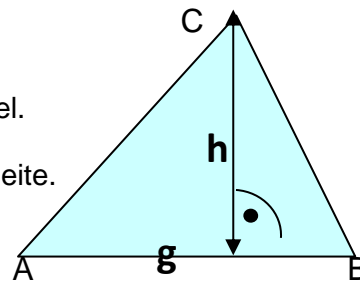
Höhe h: Abstand der Ecke von der gegenüberliegenden Seite.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$U_{\text{Dreieck}} = a + b + c$$



Bei manchen Dreiecken kann die Höhe auch außerhalb des Dreiecks liegen.



Umfangslänge  
Flächeninhalt  
Dreieck

GEOMETRIE

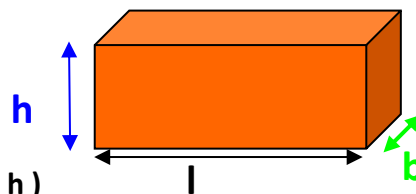
delta6  
Seite 136

**Quader:**

Länge **l** , Breite **b** , Höhe **h**

Volumen:  $V_{\text{Quader}} = l \cdot b \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Quader}} = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

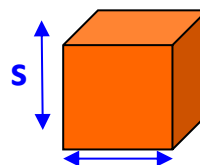


**Würfel:**

Kantenlänge **s**

Volumen:  $V_{\text{Würfel}} = s \cdot s \cdot s = s^3$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Würfel}} = 6 \cdot s^2$



Volumen  
und Ober-  
flächeninhalt (l)

Quader

GEOMETRIE

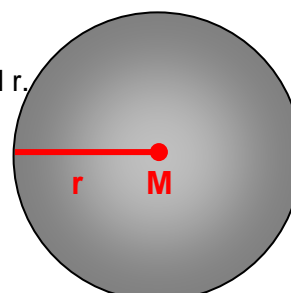
delta6  
Seite 146/152/160

**Kugel** mit der Radiuslänge **r** und dem Mittelpunkt **M**:

Alle Punkte auf der Kugel haben zum Mittelpunkt den Abstand r.

Volumen:  $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

Oberflächeninhalt:  $A = 4r^2 \pi$



Volumen  
und Ober-  
flächeninhalt  
(VI)

Kugel

GEOMETRIE

**\*NEU\***

delta10  
Seite 24 ff

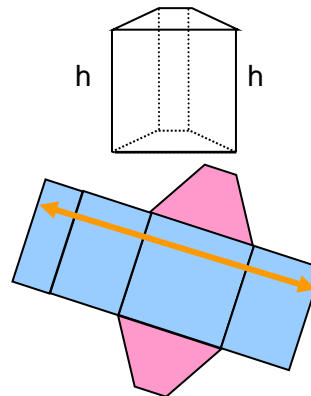
**Gerades Prisma:** Grundfläche und Deckfläche sind kongruente n-Ecke und zueinander parallel.

**Mantel:** Alle Seitenflächen (Rechtecke) zusammen.

Volumen:  $V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$

(U: Umfangslänge)



Volumen und Oberflächeninhalt (II)

Gerades Prisma

GEOMETRIE

delta9  
Seite 166f

**Gerader Kreiszylinder:** Grundfläche und Deckfläche sind kongruente Kreise und zueinander parallel.

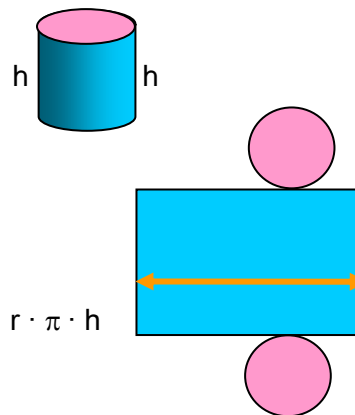
$G = r^2 \cdot \pi$

**Mantel:** Seitenfläche (Rechteck)

$M = U \cdot h = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$  (U: Umfangslänge)

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen:  $V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Volumen und Oberflächeninhalt (III)

Gerader Kreiszylinder

GEOMETRIE

delta9  
Seite 174ff

**Pyramide:** Grundfläche: Ein n-Eck (n>2)

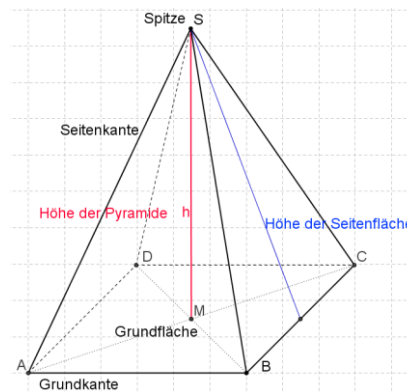
Seitenflächen: n Dreiecke

**Mantel:** Alle Seitenflächen (Dreiecke) zusammen.

**Gerade Pyramide:** Alle Seitenkanten gleich lang.

Volumen:  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Pyramide}} = G + M$



Volumen und Oberflächeninhalt (IV)

Pyramide

GEOMETRIE

delta9  
Seite 178ff

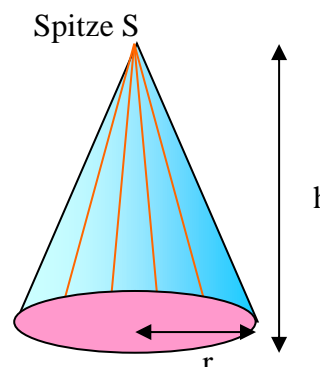
**Gerader Kreiskegel:** Grundfläche: Kreis  $G = r^2 \pi$

Mantel: Kreissektor  $M = r \pi s$

(s: Länge der Mantellinien)

Volumen:  $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberflächeninhalt:  $A_{\text{Kegel}} = G + M = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$



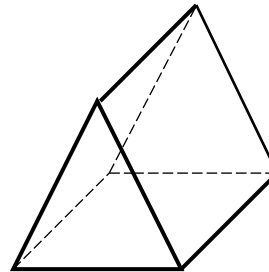
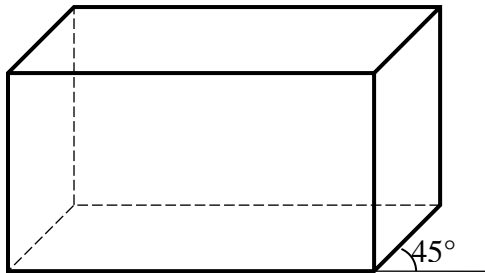
Volumen und Oberflächeninhalt (V)

Gerader Kreiskegel

GEOMETRIE

delta9  
Seite 188ff

Schrägbild



In einem **Schrägbild** wird ein Körper so gezeichnet, dass man ihn sich räumlich gut vorstellen kann.

Die „nach hinten“ verlaufenden Quaderkanten werden schräg und verkürzt, aber zueinander parallel gezeichnet. Häufig trägt man sie unter einem Winkel von 45° und in halber Länge an.

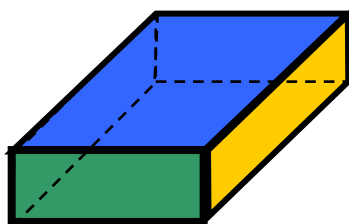
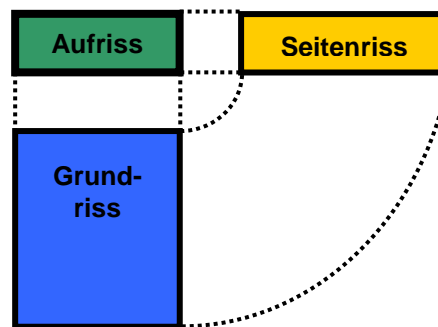
**Unsichtbare Kanten** werden gestrichelt eingezeichnet.

Um eine räumliche Vorstellung von einem Körper zu erhalten, stellt man ihn häufig aus mehreren verschiedenen Richtungen betrachtet dar:

Der **Grundriss** zeigt, wie der Körper (senkrecht) von oben betrachtet aussieht.

Der **Aufriss** zeigt, wie der Körper von vorne betrachtet aussieht.

Ein **Seitenriss** zeigt, wie der Körper von rechts (oder von links) betrachtet aussieht.



GEOMETRIE

delta6  
Seite 148/150

delta9  
Seite 164f